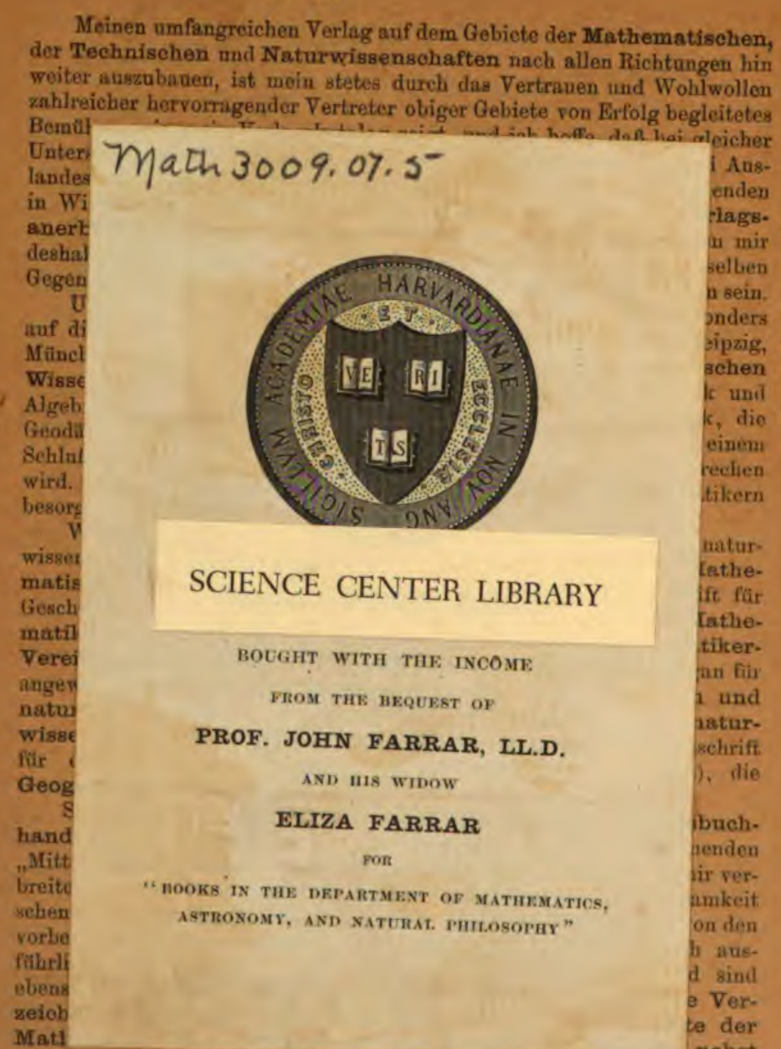
P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen,** der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes



nebst **Grenzgebieten,** 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.





VORLESUNGEN
ÜBER DIE ELEMENTE
DER
DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG
UND IHRE ANWENDUNG
ZUR BESCHREIBUNG VON NATURERSCHEINUNGEN

VON

HEINRICH BURKHARDT

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK A. D. UNIVERSITÄT ZÜRICH

MIT 38 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1907

Vorrede.

„Noch ein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung?! War denn das nötig?“ hat mich wohl mancher gefragt, wenn ich ihm von meiner Absicht sprach, meine Vorlesungen zu veröffentlichen. Dem gegenüber darf ich zunächst auf die besonderen Verhältnisse des hiesigen Unterrichts hinweisen. Einerseits habe ich hier mehr als anderwärts bei den naturwissenschaftlichen Kollegen Interesse für die Auffassung gefunden, daß ein gewisses Maß mathematischer Kenntnisse, größer als es ihm die Schule zur Zeit mitgibt, für den Studierenden der anorganischen Naturwissenschaften ein unentbehrliches Stück seiner wissenschaftlichen Ausrüstung ist. Andererseits aber erlaubt die geringe Anzahl der Lehrer einer kleinen Universität nicht, den Unterricht dieser Klasse von Hörern von dem der Mathematiker und Physiker zu trennen, wie es sonst wohl geschieht und vielleicht zweckmäßig ist; eine Änderung hierin ist in absehbarer Zeit nicht zu erwarten, da erst dringendere Bedürfnisse der Universität und insbesondere der naturwissenschaftlichen Fächer befriedigt werden müssen. So entstand für mich die Aufgabe, den Unterricht in der Weise zu gestalten, daß er soviel als überhaupt möglich für beide Klassen von Hörern fruchtbar werden sollte.

Das erforderte zunächst eine sorgfältige Auswahl des zu bietenden Stoffes. Man kann doch billigerweise den Chemikern und Mineralogen nicht mehr als eine vierstündige Vorlesung während eines Wintersemesters, einschließlich der selbstverständlich unentbehrlichen Übungsstunde, zumuten. In den damit gegebenen Raum muß also zusammengedrängt werden, was von den Elementen der Differential- und Integralrechnung für sie Interesse hat. Das erfordert natürlich die Einrichtung einer ergänzenden Vorlesung für die Mathematiker und Physiker; ich habe eine solche in der letzten Zeit in jedem anderen Sommersemester, abwechselnd mit der hier traditionellen und sogar durch die Universitätsordnung vorgeschriebenen Vorlesung über algebraische Analysis, gehalten.

Was aber die Behandlung des Stoffes betrifft, so wird wohl keine Meinungsverschiedenheit darüber bestehen, daß den Nichtmathematikern gegenüber auf Arithmetisieren verzichtet werden muß: sie müssen sogleich an der Hand konkreter Probleme eine Vorstellung davon erhalten, daß eine quantitative Behandlung der Naturerscheinungen in der Tat die Grundbegriffe der veränderlichen Größe und der zusammengehörigen Veränderungen solcher Größen nicht entbehren kann. Wie aber kann man das Arithmetisieren vermeiden, ohne den Mathematikern Auffassungen einzuflößen und ihnen Ausdrucksweisen anzugewöhnen, von denen sie sich dann in späteren Semestern wieder mühsam befreien müssen? wie wir doch alle einen guten Teil dessen wieder haben verlernen müssen, was in den Lehrbüchern zu lesen stand, die zu unserer Studienzeit verbreitet waren.

Dazu ist jedenfalls unerläßlich, daß an denjenigen Stellen, an welchen die Darstellung den Anforderungen arithmetischer Strenge nicht genügt, sondern mehr an die geometrische Anschauung appelliert, darauf hingewiesen wird, daß hier für die Mathematiker noch eine Ergänzung erforderlich ist. Es versteht sich aber, daß das nicht zu oft geschehen darf; sonst werden nicht nur die Chemiker gelangweilt, sondern auch den Mathematikern das Gefühl erweckt, daß sie beständig auf unsicheren Boden treten. Das Problem ist also des näheren so zu formulieren: wie kann man es einrichten, daß eine solche Berufung auf die Anschauung nur an wenigen — dann allerdings fundamentalen — Punkten erforderlich wird, während im übrigen die Darstellung zwar unter fortwährendem Hinweis auf die parallellaufende Anschauung, aber doch so geführt wird, daß später den Mathematikern gesagt werden kann: sobald einmal über diese bestimmten prinzipiellen Fragen Klarheit geschafft ist, bietet die Arithmetisierung der einzelnen Sätze keine wesentliche Schwierigkeit mehr.

Ich darf vielleicht hier im einzelnen darlegen, wie ich das zu erreichen gesucht habe.

Zuerst: will man den Begriff des Differentialquotienten auf den der Grenze gründen, so ist eine Erörterung dieses letzteren Begriffs und der für ihn geltenden Sätze vorauszuschicken, die aber doch nicht geschehen kann, wenn man nicht vorher den Begriff der Irrationalzahlen und das Rechnen mit ihnen erläutert hat; denn im Gebiete der Rationalzahlen allein gilt das allgemeine Konvergenzprinzip

nicht. Aber das alles ist nicht nötig, wenn man sich zunächst auf die Differentiation rationaler oder wenigstens „algebraischer“ Funktionen (im alten Sinne des Wortes) beschränkt. Bei solchen kann — wie es übrigens im wesentlichen schon Fermat geübt hat — der Differenzenquotient durch geeignete algebraische Operationen immer so umgeformt werden, daß die Differentiation mit dem Inkrement der unabhängigen Variabeln sich ausführen läßt; und nun hindert nichts, zunächst einmal den Differentialquotienten als „das“ zu definieren, „was man erhält, wenn man nach dieser Umformung jenes Inkrement gleich 0 setzt.“ Die an diese Form der Definition sich sogleich knüpfenden mathematischen und naturwissenschaftlichen Fragestellungen habe ich in einer Art von dialogischer Form ausführlich erörtert; ich hoffe dabei den beiderseitigen Ansprüchen gerecht geworden zu sein.

Auch bei der Differentiation der Exponential- und logarithmischen Funktionen kann die Einführung des Begriffs des Grenzwertes noch umgangen werden, wenn man den Logarithmus durch das bestimmte Integral und dann die Exponentialfunktion als Umkehrung von ihm definiert. Daß die Chemiker mit $\lim (1 + x/n)^n$ sich nicht befreunden können, steht erfahrungsgemäß fest; aber auch den Mathematikern macht es Schwierigkeiten, wenn es ihnen abrupt, nicht im Zusammenhang einer vollständigen Diskussion des Grenzbegriffs, dargeboten wird. Andererseits ist für diese Unterrichtsstufe jedenfalls erforderlich, daß man den Flächeninhalt einer durch elementare Kurven begrenzten geometrischen Figur als eine bestimmte geometrische Größe einführt, auch ganz abgesehen von einer solchen speziellen Verwendung; hier würde also die erste Stelle sein, wo auf die Notwendigkeit späterer Ergänzung hingewiesen werden müßte.

Die zweite Stelle, an der sich dieses Bedürfnis nach späteren Ergänzungen für die Mathematiker geltend macht, ist der Satz „eine stetige Funktion kann nicht von negativen zu positiven Werten übergehen, ohne durch Null zu passieren“.

Dagegen erscheint es mir untunlich, auf die Frage der Reihenkonvergenz in einer derartig angelegten Vorlesung überhaupt einzugehen; das bleibt immer unbefriedigend, wenn es nicht arithmetisch gemacht wird. Ich habe es daher vorgezogen, das Wort Konvergenz überhaupt nicht auszusprechen und die Taylorsche Formel zunächst nur im Sinne der Approximationsmathematik zu behandeln. Dazu

ist der Mittelwertsatz erforderlich; will man diesen einfach beweisen, so muß man die Ableitung als abteilungsweise monoton voraussetzen; aber von Funktionen mit unendlich vielen Extremwerten wird man doch überhaupt nicht reden wollen.

Die Diskussion des Restgliedes der Maclaurinschen Reihe — man braucht eigentlich nur diese, nicht die allgemeine Taylorsche — habe ich, um wenigstens an einem Beispiele die auftretenden Fragen zu kennzeichnen, an der Exponentialreihe, aber nur an dieser, durchgeführt; es bedarf kaum des Hinweises darauf, daß diese Frage von der Konvergenzfrage wohl zu unterscheiden ist.

All das läßt sich freilich nur dann in dieser Weise durchführen, wenn die Differentiation der trigonometrischen Funktionen in den ersten Abschnitten ganz bei Seite gelassen wird. Denn bei dieser muß man notwendig von dem sogenannten wahren Wert eines Ausdrucks reden, der in der unbestimmten Form 0/0 erscheint, ohne daß es möglich wäre, diese Unbestimmtheit durch bloße algebraische Umformung zu beseitigen. Eine solche Hinausschiebung der trigonometrischen Funktionen empfiehlt sich aber auch sonst: sie haben ja ohnedies für alle diejenigen geringere Bedeutung, die sich mit periodischen Erscheinungen nicht zu befassen brauchen. (Freilich kann man fragen, ob man das bei der heutigen Ausbreitung der Wechselstromtechnik überhaupt noch von irgend jemand behaupten kann). Bringt man sie erst am Ende der Vorlesung, so kann man den „wahren Wert“ von $\sin x/x$ für $x = 0$ einigermaßen befriedigend behandeln, da vorher schon die „wahren Werte“ algebraischer Funktionen und solcher, die sich näherungsweise durch algebraische Funktionen ersetzen lassen, ausführlich besprochen sind. Ein Hinweis auf die Notwendigkeit späterer Ergänzungen ist freilich für die Mathematiker auch hier erforderlich; es ist aber ganz zweckmäßig, wenn ein solcher möglichst nahe am Schluß noch einmal kommt. — Die einfachsten Formeln der trigonometrischen Interpolation, sowie eine möglichst elementare Behandlung gedämpfter und ungedämpfter, freier und erzwungener Schwingungen habe ich angeschlossen.

So sind es — abgesehen von der prinzipiellen Frage, wie es denn die Analysis überhaupt anfängt, den Forderungen der Geometrie gerecht zu werden — schließlich nur drei Stellen, an denen ein Hinweis auf spätere Ergänzungen für die Mathematiker unerläßlich ist: die arithmetische Auffassung des Flächeninhalts; die Formulierung des Begriffs der Stetigkeit und seiner nächsten Konsequenzen;

und die damit zusammenhängende, zuletzt, bei der Differentiation der trigonometrischen Funktionen, aufgerollte Frage des Grenzübergangs.

Daß ich Rechnen mit Näherungsformeln, numerische Auflösung von Gleichungen, Interpolation[1]) ausführlich behandelt habe, bedarf kaum der Begründung; vielleicht aber die Hervorhebung des Cauchyschen Interpolationsverfahrens, für die ich mich gegen die Autorität von Seeliger[2]) auf die von Bruns[3]) berufen darf.

Dann habe ich in einem besonderen Abschnitte auch das Rechnen mit Differentialien („unendlich kleinen Größen im Sinne der Differentialrechnung") besprochen. Sicher kann die Einführung dieser Art zu rechnen am Anfang der Differentialrechnung Unklarheiten befördern; aber ich meine, wenn einmal durch die Einübung des Rechnens mit Differentialquotienten ein fester Grund gelegt ist, sollte man sich die Vorteile nicht entgehen lassen, die das Rechnen mit den Differentialien selbst bietet. Tatsächlich tut das auch nicht nur kein Physiker, sondern z. B. auch kein Differentialgeometer. Aber dann muß es doch gelehrt werden und darf nicht in den späteren Vorlesungen unvermittelt auftreten.

Die Behandlung der Funktionen von zwei Veränderlichen ist ziemlich kurz ausgefallen; Nachdruck habe ich allerdings auf einen Punkt gelegt, dessen Nichtbeachtung in der Thermodynamik schon öfters Unheil angerichtet hat: daß nämlich ein partieller Differentialquotient erst dann definiert ist, wenn nicht nur angegeben ist, nach welcher Variabeln differentiiert wird, sondern auch welche andere Variable dabei als konstant zu behandeln ist.

Auf weitergehende naturwissenschaftliche oder gar technische Anwendungen habe ich schon deswegen verzichtet, weil in den Ländern deutscher Zunge den Studierenden, die eine solche Vorlesung hören, die erforderlichen Kenntnisse aus jenen Gebieten

1) Für Interpolation durch Exponentialfunktionen liegen Formeln und Vorschriften handschriftlich aus dem Nachlaß von Biot und aus dem von Regnault bei der Pariser Akademie; es wäre sehr zu wünschen, daß sie veröffentlicht würden. Inzwischen habe ich mir selbst ein Verfahren dazu abgeleitet und im Anhang mitgeteilt.

2) Ich habe anderswo (Jahresber. der d. Math.-V. 10, p. 819) auseinandergesetzt, weshalb ich dem von Seeliger gegebenen Beispiel, das gegen das Verfahren sprechen soll, keine Beweiskraft zusprechen kann.

3) Grundlagen des wissenschaftlichen Rechnens p. 159.

meistens noch fehlen. Auch eine mathematische Aufgabensammlung habe ich nicht beigefügt, da an solchen kein Mangel ist, und da doch naturgemäß im Grunde in allen dieselben Aufgaben stehen müssen. Aber selbstverständlich möchte ich jedem Anfänger raten, sich durch eigenes Lösen von Aufgaben die zum Verständnis unbedingt nötige Geläufigkeit in der Handhabung der Rechnungsregeln zu verschaffen.

In dieser Weise glaubte ich zunächst für unsere hiesigen Verhältnisse einen Ausgleich zwischen einander im Grunde widerstrebenden Anforderungen finden zu können; ich darf aber vielleicht hoffen, daß das Buch auch anderwärts, wo ähnliche Umstände vorliegen, sich nützlich erweisen wird. Auch manchem Lehrer, der bei der gegenwärtigen Diskussion über die Zweckmäßigkeit und Durchführbarkeit der Einführung der Elemente der Infinitesimalrechnung in den Schulunterricht sich ein eigenes Urteil zu bilden wünscht, wird es vielleicht willkommen sein. Doch möchte ich es nicht als ein eigentliches Schulbuch angesehen wissen; eine gewisse Reife setzt es immerhin voraus.

Für die Herstellung der Figuren und des Inhaltsverzeichnisses, sowie für mannigfache Hilfe bei der Korrektur bin ich meiner Frau zu Dank verpflichtet.

Zürich, den 2. April 1907.

H. Burkhardt.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§ 1. Die moderne mathematische Auffassung der Naturerscheinungen.

Alle Naturbetrachtung ist zunächst rein *qualitativ*. Die unmittelbaren Sinneseindrücke können wir nicht messen, nicht einmal in bezug auf ihre Größe miteinander vergleichen; einen Unterschied wie den zwischen einem Ton und einer Farbe, oder auch den zwischen zwei verschiedenen Farben können wir nicht begrifflich fassen und infolgedessen auch nicht beschreiben, sondern höchstens zeigen. Näher rücken wir der Möglichkeit mathematischer Behandlung, wenn wir uns auf die Untersuchung *gleichartiger* Vorgänge, bezw. Empfindungen beschränken und diese nach ihrer *Intensität* unterscheiden; wir sprechen von größerer oder geringerer Helligkeit, größerer oder geringerer Wärme und Kälte u. s. f. Aber eine wirkliche Handhabe zum Ansetzen mathematischer Werkzeuge haben wir erst dann, wenn wir sagen können: der Unterschied zwischen a und b ist ebensogroß wie der zwischen c und d; anders ausgedrückt, wenn wir eine Skala besitzen, an der wir die einzelnen Stufen der zu vergleichenden Intensitäten *messen* können. In diesem Sinne sind eine Reihe von Naturerscheinungen seit ältester Zeit quantitativ, also mathematisch behandelt worden.

Wenn man aber jetzt von mathematischer Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme spricht, so meint man damit gewöhnlich noch etwas spezielles. Die Unterscheidung, von der hier die Rede ist, entspricht einer Differenz in der Auffassung der Aufgabe der Naturwissenschaft überhaupt, die wir daher zuerst besprechen müssen: Die antike und auf ihr fußend die mittelalterliche Naturwissenschaft fragt nach den Ursachen der Dinge, bezw. ihrer Zustände selbst; sie stellt und beantwortet Fragen wie die folgenden: warum ist die Erde unten und die Luft oben? warum ist dieser Stein blau und jener grün? warum ist dieser Körper warm und jener kalt? Da-

gegen beginnt die moderne Naturwissenschaft, deren Schöpfer GALILEI ist, mit der Frage nach den *Ursachen der Veränderung der Dinge.* Daß ein einmal in Bewegung gesetzter Körper in gleichförmiger geradliniger Bewegung verharrt, daß ein blauer Körper seine Farbe beibehält, daß ein magnetisiertes Stück weiches Eisen magnetisch bleibt u. s. w. erscheint uns nicht weiter wunderbar, und wir beanspruchen dafür keine besondere Ursache; aber wenn ein bewegter Körper die Geschwindigkeit oder die Richtung seiner Bewegung ändert, wenn ein farbiger Körper seine Farbe wechselt, wenn ein unmagnetischer oder unelektrischer Körper magnetisch bezw. elektrisch wird, oder umgekehrt der magnetische oder elektrische Körper seinen Magnetismus oder seine Elektrizität verliert, dann fragen wir nach den Ursachen solcher Erscheinungen, nach den Kräften, die solche Veränderungen zu bewirken imstande sind. Man darf diesen Gegensatz übrigens nicht, wie es wohl zu geschehen pflegt, so auffassen, als seien die alten Naturforscher unvernünftige Menschen gewesen, die törichte Fragen an die Natur gestellt hätten. Daß bei der einen Art der Fragestellung sich mehr Resultate ergeben würden, als bei der anderen, das war in keiner Weise vorauszusehen; erst der Mißerfolg der einen, der Erfolg der andern Betrachtungsweise konnte das lehren.

Wenn wir nun solche gesetzmäßige Beziehungen zwischen den Veränderungen der Eigenschaften verschiedener Körper quantitativ, also mathematisch verfolgen wollen, so sind wir genötigt, auch in unsere abstrakt mathematische Betrachtung von Größen das Element der *Veränderlichkeit* einzuführen. Der eben geschilderten Divergenz zwischen antiker und moderner *Naturwissenschaft* geht eine ganz entsprechende Divergenz zwischen antiker und moderner *Mathematik* parallel. Die antike Geometrie und mit ihr noch die heutige Schulgeometrie, die ja zum größten Teil aus dem Altertum stammt, betrachtet die geometrischen Gebilde als fest und unveränderlich. Entsprechend verfährt auch die elementare Algebra: ein Buchstabe kann zwar an und für sich eine beliebige Zahl bedeuten, aber es wird ausdrücklich verabredet, daß er während einer und derselben Rechnung immer *dieselbe* Zahl bedeuten soll. Für eine mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Probleme in dem speziellen, sich an die fundamentalen Auffassungen moderner Naturwissenschaft anschließenden Sinne, den wir oben im Auge hatten, reicht das nicht aus; wenn wir die Veränderungen der Dinge quantitativ verfolgen

wollen, so müssen wir uns dazu entschließen, *auch die abstrakt gedachten analytischen und geometrischen Größen als veränderlich aufzufassen.* Diesen Schritt, der seit GALILEI das ganze 17. Jahrhundert hindurch vorbereitet war, haben NEWTON und LEIBNIZ gleichzeitig und soviel man sehen kann durchaus unabhängig voneinander gewagt; ihren Wegen müssen wir in dieser Vorlesung nachgehen. Dabei wird es sich wesentlich darum handeln, die tiefen Ideen NEWTONS in der von LEIBNIZ und seinen Schülern ausgebildeten geschmeidigen Ausdrucks- und Bezeichnungsweise darzustellen.

§ 2. Mathematische Hilfsmittel zur Darstellung der Abhängigkeit zwischen zwei veränderlichen Größen.

Solange wir nur eine einzelne Größe betrachten, läßt sich über ihre Veränderlichkeit weder abstrakt mathematisch, noch konkret naturwissenschaftlich viel sagen; höchstens vielleicht die Tatsache, daß sie sich ändern kann, und etwa noch die weitere, daß ihrer Veränderlichkeit gewisse Schranken gesetzt sind, daß sie z. B. nur positive Werte, oder wie der Sinus eines Winkels nur Werte annehmen kann, die nicht größer als 1 sind. Anders wird die Sache, wenn wir gleichzeitige Veränderungen zweier, später auch noch mehrerer Größen betrachten. Wir beobachten in vielen Fällen, daß die Veränderungen zweier Größen nicht unabhängig voneinander geschehen, sondern daß jedesmal, wenn die eine Größe einen bestimmten Wert hat, der Wert der andern nicht mehr willkürlich, sondern ebenfalls ganz bestimmt ist. So hat z. B. ein Metallstab bei jeder bestimmten Temperatur eine bestimmte Länge. Die zusammengehörigen Werte der Temperatur und der Länge können wir uns in einer Tabelle zusammenstellen, indem wir in ihre eine Spalte die beobachteten Temperaturen, daneben in eine zweite Spalte die dabei gemessenen Längen eintragen; etwa so:

0°	1 m
20°	1,0004 m
40°	1,0008 m
60°	1,0012 m
80°	1,0016 m
120°	1,0024 m
200°	1,0080 m

Wir sagen dann: die beiden Größen sind durch ein Gesetz, ein *Naturgesetz,* miteinander verknüpft. Wir können dieses Naturgesetz als durch die Tabelle bereits hinlänglich festgelegt ansehen; aber das wird uns weder theoretisch noch praktisch befriedigen. Theoretisch nicht, weil wir daraus keine weiteren Folgerungen ziehen können; und praktisch nicht, weil wir solche Tabellen doch weder alle dem Gedächtnis einprägen, noch alle immer mit uns führen können. Wir werden fragen: wie können wir die durch die Tabelle ausgedrückten Tatsachen in kompendiöser Form zusammenfassen, m. a. W.: wie können wir eine solche gegenseitige Abhängigkeit der Veränderungen zweier Größen mathematisch darstellen?

In vielen Fällen gelingt das schon mit Hilfe der elementarsten Operationen der Algebra. Der einfachste Fall würde sein, daß die eine Größe sich immer in demselben Verhältnis ändert wie die andere, daß die beiden Größen, wie man zu sagen pflegt, miteinander *proportional* sind. Z. B. ist (innerhalb gewisser Grenzen) die durch Wärmezufuhr bedingte Ausdehnung eines Stabes der Temperaturerhöhung proportional, so daß also eine Temperaturerhöhung um 2, 3, . . ., x Grade eine doppelte, dreifache, . . ., x mal so große Ausdehnung mit sich bringt, als eine Temperaturerhöhung um einen Grad. Bezeichnen wir diese letztere Ausdehnung mit c oder auch mit s_1, die einer Temperaturerhöhung um 2, 3, . . ., x Grade entsprechenden Verlängerungen bezw. mit $s_2, s_3, \ldots, s_x$ so haben wir:

$$\begin{aligned} s_1 &= c \\ s_2 &= 2c \\ s_3 &= 3c \\ &\vdots \\ s_x &= xc \end{aligned}$$

oder wie wir lieber schreiben:

$$s_x = cx. \tag{1}$$

Diese letzte Gleichung kann nun die vorhergehenden alle ersetzen, indem wir ja in ihr dem x nach Belieben die Werte 1, 2, 3, . . . beilegen können. Ja, wenn wie im vorliegenden Falle das Gesetz auch für andere als ganzzahlige Werte von x einen Sinn hat und richtig bleibt, so können wir in der letzten Gleichung dem x auch gebrochene Werte beilegen, so daß sie dann also für sich allein noch mehr aussagt als die sämtlichen vorhergehenden (sowohl die

angeschriebenen als die gedachten) Gleichungen. *Wir haben also schließlich das Naturgesetz*, um das es sich handelt, *durch eine einzige Gleichung ausgedrückt.* In dieser Gleichung sind x und s *veränderliche* Größen, denen wir beliebige Werte beilegen können, c dagegen ist für jeden einzelnen Stab, den wir untersuchen, eine feste, nur von der Natur dieses gerade vorliegenden Stabes, nicht von seiner Temperatur abhängige Größe. Die Veränderlichkeit der beiden Größen x und s ist aber durch die Gleichung aneinander geknüpft, derart, daß die eine sich nicht ändern kann, ohne daß die andere es gleichzeitig tut; so daß also der Wert der einen bestimmt ist, sobald wir den der andern kennen. Messen wir die augenblickliche Länge des Stabes, so können wir mit Hilfe der Formel daraus seine Temperatur entnehmen; wir können den Stab geradezu als Thermometer benutzen. Andererseits können wir mit Hilfe der Formel auch angeben, wie lang der Stab bei gegebener Temperatur sein wird.

Etwas komplizierter ist ein zweiter Fall: daß von den beiden Veränderlichen die eine nicht zu der andern selbst, sondern zu einer *Potenz* von ihr proportional ist. So ist bei gleicher Belastung und gegebener Form und Größe des Querschnitts die Durchbiegung eines Stabes der dritten Potenz seiner Länge proportional, d. h. ein doppelt so langer Stab senkt sich in der Mitte 8mal so stark als ein Stab von der einfachen Länge, ein 3mal so langer 27mal so stark. Man spricht dann auch von Potenzen mit negativen oder mit gebrochenen Exponenten und sagt z. B.: nach dem NEWTONschen Gesetz ist die Anziehung zweier Massenpunkte aufeinander der $(-2)^{\text{ten}}$ Potenz ihres gegenseitigen Abstandes proportional. Alle derartigen Gesetze lassen sich durch Gleichungen der Form darstellen:

$$y = cx^n, \tag{2}$$

in der x und y die beiden veränderlichen Größen bezeichnen, die durch das Gesetz miteinander in Beziehung gebracht werden, c einen konstanten, d. h. von x und y nicht (sondern ev. nur von den übrigen Bedingungen der Aufgabe) abhängigen Faktor.

In noch komplizierteren Fällen läßt sich die Beziehung zwischen den beiden betrachteten Größen nicht durch ein einziges solches Glied darstellen, sondern man bedarf dazu einer Summe mehrerer derartiger Glieder, m. a. W. eines Ausdrucks der Form:

$$y = ax^k + bx^l + cx^m + \cdots, \tag{3}$$

in der die Exponenten $k, l, m, \ldots$ und die „Koeffizienten“ $a, b, c, \ldots$ von x und y unabhängige Größen bedeuten sollen. Sind die Exponenten alle positive ganze Zahlen, so nennt man einen solchen Ausdruck, wie hier gleich erwähnt sei, eine „rationale ganze Funktion von x“. So gilt z. B. das oben erwähnte Gesetz der thermischen Ausdehnung eines Stabes streng genommen nur innerhalb enger Temperaturintervalle so genau, daß man die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung Beobachtungsfehlern zuschreiben dürfte; kommen größere Temperaturänderungen in Betracht, so muß man der Formel noch ein Glied mit der zweiten, ev. auch noch eines mit der dritten Potenz von x hinzufügen.

Wieder in anderen Fällen wird sich die eine Größe y durch einen Ausdruck darstellen lassen, der die andere Größe x auch in einem Nenner enthält.

Manche Physiker sind der Meinung, in letzter Instanz müßten sich alle Naturgesetze auf solche einfache Formeln zurückführen lassen. Andere denken anders: als einem der ersten Physiker des 19. Jahrhunderts, FRESNEL, dem Begründer der Kristalloptik, entgegengehalten wurde, seine theoretischen Anschauungen führten doch auf sehr komplizierte mathematische Formulierungen, wenn man aus ihnen die einzelnen Erscheinungen ableiten wollte, antwortete er: „la nature ne redoute pas les difficultés de l'analyse.“

Wie dem auch sei, jedenfalls ist eine solche einfache Formulierung in vielen Fällen bis jetzt nicht gelungen. So läßt sich, um nur ein Beispiel zu nennen, das Gesetz der Brechung eines Lichtstrahls nicht einfacher quantitativ formulieren, als indem man sagt: der Sinus des Einfallswinkels steht zu dem Sinus des Brechungswinkels in einem festen Verhältnis. Es reichen also zur Formulierung dieses Gesetzes die Zeichen der Algebra nicht aus, sondern man bedarf dazu des komplizierteren Abhängigkeitsverhältnisses, in dem der Sinus eines Winkels zu dem Winkel selbst steht; also desjenigen Teiles der Mathematik, den man Goniometrie oder die Lehre von den trigonometrischen Funktionen nennt. Ein anderes Beispiel: die Bahn eines geworfenen Körpers, die Bahn eines Kometen, der die Sonne umkreist, sind weder gerade Linien, noch Kreise, auch nicht einmal annähernd; sie werden sich also nicht mit Hilfe der sogenannten elementaren Geometrie allein behandeln lassen, die keine anderen Linien, als Gerade und Kreise betrachtet.

Aber auch wenn ein Naturgesetz einfach ist, brauchen es doch

die Folgerungen nicht zu sein, die man aus ihm zu ziehen hat. So ist das NEWTONsche Gesetz der Anziehung zwischen zwei Massenpunkten, wie es oben ausgesprochen ist, sehr einfach; auch wenn man mit seiner Hilfe die Anziehung zwischen zwei homogenen Kugeln berechnen will, kommt man noch verhältnismäßig einfach aus, indem sich durch nicht eben komplizierte Überlegungen zeigen läßt, daß die Anziehung der Kugeln dieselbe ist, wie wenn die Masse einer jeden in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Aber schon wenn man die Abplattung der Planeten bei Berechnung ihrer Anziehung berücksichtigen will, braucht man höhere mathematische Hilfsmittel, als sie in dieser einleitenden Vorlesung entwickelt werden können.

Übrigens sei hierzu noch bemerkt: der Beweis, daß ein bestimmtes Problem sich nicht mit elementaren Mitteln lösen läßt, kann selbst auch nicht mit ihnen geführt werden, sondern verlangt schon eine Herbeiziehung höherer Hilfsmittel.

§ 3. Vom Wesen der sogenannten höheren Analysis oder der Differential- und Integralrechnung.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun imstande, wenigstens einigermaßen den Gegenstand der folgenden Untersuchungen zu bezeichnen. Wir knüpfen dazu wieder an die Auseinandersetzungen von § 1 an, an die Frage nach den Kräften, durch die die Veränderungen an den Naturkörpern hervorgebracht werden. Die Beobachtung zeigt sehr bald, daß diese Kräfte von dem *augenblicklichen* Zustand des betrachteten Systems von Körpern abhängen — von ihrer gegenseitigen Entfernung, ihrem elektrischen und magnetischen Zustand, ihrer Temperatur u. s. w. Andererseits wird aber eben dieser Zustand von den wirkenden Kräften fortwährend geändert. Ferner gelangen wir beim aufmerksamen Studium der Natur zu der Überzeugung, daß die zunächst beobachteten Veränderungen der Körper sich zusammensetzen aus sehr vielen sehr kleinen Veränderungen der kleinsten Teile, und daß wir demgemäß auch die Wirkungen, die zwei Körper aufeinander ausüben, für die Untersuchung zweckmäßigerweise zerlegen in „Elementarwirkungen", die von den kleinsten Teilen des einen auf die kleinsten Teile des andern ausgeübt werden. Das schon mehrfach erwähnte NEWTONsche Anziehungsgesetz, das in seiner einfachsten Form für sogenannte „materielle Punkte" gilt,

ist ein klassisches Beispiel der Art; aber auch die Erscheinungen auf anderen Gebieten der Physik sind in entsprechender Weise aufzufassen. (Nebenbei bemerkt: die Frage, ob Nahewirkung oder Fernewirkung anzunehmen ist, hat mit der hier besprochenen gar nichts zu tun; wir können die eine wie die andere „atomistisch" auffassen.)

Aus der geschilderten Sachlage ergeben sich nun zwei Klassen von Fragen:

1) Haben wir einen Vorgang beobachtend und messend verfolgt und wollen ihn nun analysieren, so entstehen die Fragen: wie schließen wir von dem ganzen zeitlichen Verlauf auf die in jedem einzelnen Augenblick tätigen Kräfte? wie schließen wir von dem, was an dem ganzen Körper vor sich geht, auf die Vorgänge in seinen einzelnen Teilen?

2) Glauben wir das „Elementargesetz" einer Kraft zu kennen, und wünschen wir aus ihm abzuleiten, was bei einer noch nicht beobachteten Versuchsanordnung eintreten wird, sei es um die Richtigkeit des angenommenen Gesetzes am Erfolg zu prüfen, sei es, um unsere Kenntnis des allgemeinen Gesetzes praktisch zu verwerten, so entstehen umgekehrt die Fragen: wie summieren sich die von den einzelnen Teilen ausgeübten Wirkungen zu der Gesamtwirkung der ganzen Körper? wie summieren sich die in jedem einzelnen Moment eintretenden Wirkungen zu dem schließlichen Gesamtresultat?

Beides sind, insofern sie sich auch auf quantitative Verhältnisse beziehen sollen, *mathematische* Fragen; sie sind in ähnlicher Weise einander entgegengesetzt, wie Addition und Subtraktion, oder Potenzierung und Wurzelausziehung. Die Fragen der ersteren Klasse bilden den Gegenstand der *Differentialrechnung,* die der letzteren Klasse den Gegenstand der *Integralrechnung.* Beide Disziplinen zusammen werden wohl auch als *Infinitesimalrechnung* oder (weniger zweckmäßig) als höhere Analysis bezeichnet. Wir können sie definieren als *die Lehre von den zusammengehörigen Veränderungen der Größen.*

Da man alle Größen messen, d. h. durch Zahlen ausdrücken kann, so kann auch die ganze Untersuchung der zusammengehörigen Veränderungen der Größen an als veränderlich gedachten Zahlen durchgeführt werden. Die Schöpfer der höheren Analysis haben das nicht getan, sondern sie haben ihre Entwicklungen an konkrete Vorstellungen angeschlossen: NEWTON an die Vorstellung eines im

Raume im Verlauf der Zeit sich bewegenden Punktes, LEIBNIZ an die etwa 50 Jahre vorher von DESCARTES begründete analytische Geometrie. Wir wollen in den nächsten Paragraphen beide Arten von Einführung in die Analysis kennen lernen.

§ 4. Vorbereitende Untersuchung der gleichförmigen Bewegung eines Punktes.

Von einem Punkte, der auf einer geraden Linie sich so bewegt, daß er in gleichen Zeiten immer gleiche Strecken (Wege) *zurücklegt, sagt man: er bewegt sich gleichförmig.* Legt er in jeder Sekunde c Zentimeter zurück, so sagt man: *er hat die Geschwindigkeit* c. Er legt dann in t Sekunden ct Zentimeter zurück; bezeichnet man den Weg, den er in diesen t Sekunden zurücklegt, mit s oder deutlicher mit s_t, so hat man die Gleichung:

$$s_t = ct, \tag{1}$$

die also das Gesetz der Bewegung eines solchen Punktes ausdrückt. Zählen wir die Zeit von dem Augenblicke an, in welchem der Punkt seine Bewegung beginnt, so können wir diese Gleichung auch so aussprechen: t Sekunden nach Beginn der Zeitzählung ist der Punkt ct Zentimeter von seinem Ausgangspunkte entfernt. Dasselbe meinen wir, wenn wir kürzer sagen: *Zur Zeit t hat der Punkt den Weg ct zurückgelegt.* Diese Aussagen gelten dann nicht etwa nur für *einen* bestimmten Zeitmoment t und für *eine* Lage des Punktes, sondern sie gelten für *jeden* überhaupt in Betracht kommende Zeitmoment, wenn wir nur jedesmal unter s denjenigen Weg verstehen, den der Punkt gerade bis zu diesem Zeitmoment zurückgelegt hat; anders ausgedrückt, sie gelten für jedes *Paar von zusammengehörigen Werten* von s und t. Insofern können wir sagen: s und t treten in dieser Gleichung als *veränderliche (variable)* Größen auf; wir können ihnen willkürliche, oder wenigstens innerhalb gewisser Grenzen willkürliche Werte beilegen.

(Der Zusatz: „innerhalb gewisser Grenzen“ muß hier gemacht werden, insofern es wenigstens zunächst keinen Sinn hat, dem t negative Werte beizulegen, oder Werte die größer sind als diejenige Zahl T von Sekunden, während deren die Bewegung überhaupt in der angenommenen Weise vor sich geht.)

Aber auch abgesehen von dieser Begrenzung ist die Willkürlichkeit von t und s keine vollkommene, sie sind nicht von einander

unabhängig veränderlich, sondern durch die Gleichung (1) aneinander geknüpft, wir können nicht jeder von ihnen unabhängig von der anderen einen willkürlichen Wert beilegen, sondern wenn wir der einen einen willkürlichen Wert beigelegt haben, ist durch die Gleichung der der anderen beizulegende Wert vollkommen bestimmt.

In unserem Fall ist nun die zunächst sich darbietende Frage die folgende: wir legen dem t einen bestimmten Wert bei, d. h. wir beobachten unsern Punkt zur Zeit t (t Sekunden nach Beginn der Zeitzählung); welchen Wert hat dann s, d. h. um wie viele Zentimeter befindet sich dann der Punkt von seinem Ausgangspunkte entfernt? Auf diese Frage gibt die Gleichung (1), so wie sie dasteht, Antwort. Wir drücken diese Tatsache so aus, daß wir sagen: Bei *dieser* Form der Gleichung erscheint t als die *unabhängige Veränderliche*, der ein beliebiger Wert beigelegt werden kann, s als eine von t *abhängige*. Statt: „s ist eine Variable, die von einer anderen Variabeln t abhängt“, sagen wir dann wohl auch kürzer „*s ist eine Funktion von t*“.

Wir können aber auch die umgekehrte Frage stellen: wir geben dem s einen willkürlichen Wert, d. h. wir halten uns an irgend einer Stelle neben der Bahn des Punktes auf und fragen: zu welcher Zeit t wird s gerade diesen Wert annehmen, d. h. zu welcher Zeit wird unser beweglicher Punkt gerade an dieser Stelle vorbeikommen? Diese Frage wird beantwortet, indem wir die Gleichung (1) nach t *auflösen*, d. h, sie in folgender Form schreiben

$$t = \frac{s_t}{c} \quad \text{oder jetzt besser} \quad t_s = \frac{s}{c}. \qquad (2)$$

Jetzt erscheint also umgekehrt s als die unabhängige Variable, t als eine Funktion von ihr.

Die Abhängigkeit des s von dem t, bezw. des t von dem s, ist in den Gleichungen (1) und (2) dadurch angedeutet, daß das t dem s, bezw. das s dem t, als Index angehängt ist. Gewöhnlich tut man das nicht, sondern versteht ohne weiteres die Sache so, daß s und t (oder welche Buchstaben sonst zur Bezeichnung der Veränderlichen gebraucht sein mögen) immer *zusammengehörige Werte bedeuten sollen.*

Der Faktor c hat bei dieser ganzen Untersuchung fortwährend denselben Wert beibehalten; er bedeutet nämlich immer die unveränderte Geschwindigkeit des betrachteten Punktes. Eine solche Größe, die während einer ganzen Untersuchung beständig denselben Wert beibehält, während andere Größen sich ändern, nennen wir eine *Konstante.*

§ 5. Entwickelung der Grundbegriffe der Differentialrechnung am Beispiele der Fallbewegung.

Gehen wir über zur Betrachtung eines etwas komplizierteren Beispiels. Das Gesetz, nach dem ein frei fallender Körper unter dem Einfluß der Schwerkraft sich bewegt, ist nicht so einfach, wie das in § 4 besprochene, sondern es hat, wenn von Luftwiderstand und anderen sogenannten störenden Einflüßen abgesehen wird, die Form:

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{1}$$

Dabei bedeutet g eine Konstante, deren numerischer Wert etwa $= 980$ ist, wenn wieder die Längen in Zentimetern, die Zeiten in Sekunden gemessen werden. Ein solcher Körper hat also

$$1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \ldots \qquad t$$

Sekunden *nach* Beginn seiner Bewegung einen Weg von

$$490 \qquad 4 \cdot 490 \qquad 9 \cdot 490 \qquad 16 \cdot 490 \ldots \; t^2 \cdot 490$$

oder

$$490 \qquad 1960 \qquad 4410 \qquad 7840 \ldots \qquad 490\, t^2$$

Zentimetern zurückgelegt. Die Wege, die er *in* den einzelnen Sekunden zurückgelegt hat, finden wir, wenn wir jedesmal den schon bis zu Anfang der betreffenden Sekunde zurückgelegten Weg von dem bis zu ihrem Ende zurückgelegten subtrahieren; *in* der

$$1. \qquad 2. \qquad 3. \qquad 4. \ldots \qquad t^{\text{ten}}$$

Sekunde hat er also:

$$490 \qquad 3 \cdot 490 \qquad 5 \cdot 490 \qquad 7 \cdot 490 \ldots [t^2 - (t-1)^2]\, 490$$

oder

$$490 \qquad 1470 \qquad 2450 \qquad 3430 \ldots 490\,(2t-1)$$

Zentimeter zurückgelegt. Er legt also nicht in jeder Sekunde immer denselben Weg zurück, seine Bewegung ist keine gleichförmige, er hat nicht immer dieselbe Geschwindigkeit, ja wenn wir an der im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Definition der Geschwindigkeit streng festhalten wollten, so könnten wir bei ihm von Geschwindigkeit überhaupt nicht reden.

Wir müssen also die Sache noch genauer untersuchen, zu diesem Ende uns aber erst über eine zweckmäßige Ausdrucks- und Bezeichnungsweise einigen. Wir sehen uns häufig veranlaßt, mehrere Werte derselben veränderlichen Größe nebeneinander in die Rechnung einzuführen; in solchen Fällen bedienen wir uns für alle diese Werte desselben Buchstabens, um anzudeuten, daß es sich um Werte

derselben Veränderlichen handelt, und setzen an diesen Buchstaben Zahlen oder andere Buchstaben als Indizes, um die verschiedenen Werte derselben Veränderlichen auseinander zu halten: t_1, t_2. Die dazugehörigen Werte einer anderen Variabeln unterscheiden wir dann durch *dieselben* Indizes; sodaß also z. B. bei dem Problem, mit dem wir uns eben beschäftigen, s_1 denjenigen Weg bezeichnet, den der Punkt während der t_1 ersten Sekunden zurücklegt. Der Weg, den der Punkt vom Moment t_1 bis zum Moment t_2 zurücklegt, ist dann:

$$s_2 - s_1 = \tfrac{1}{2} g t_2^2 - \tfrac{1}{2} g t_1^2 = \tfrac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2) = \tfrac{1}{2} g (t_2 - t_1)(t_2 + t_1). \quad (2)$$

Diesen Weg vergleichen wir nun mit der zu seiner Zurücklegung erforderlichen Zeit $t_2 - t_1$; wir nennen den Quotienten[1]

$$c_{12} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \tfrac{1}{2} g (t_2 + t_1) \quad (3)$$

die *mittlere* oder *durchschnittliche Geschwindigkeit* des Punktes während der Zeit von t_1 bis t_2. Ein Punkt, der sich während dieser Zeit mit der konstanten Geschwindigkeit c_{12} bewegt hätte, hätte in dieser Zeit denselben Weg zurückgelegt wie unser Punkt.

Wir können die gefundene Gleichung (3) noch etwas anders schreiben, indem wir für die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ ein eigenes Zeichen h einführen. Dann ist

$$t_2 = t_1 + h \quad (4)$$

und also:

$$c_{12} = \tfrac{1}{2} g (2 t_1 + h) = g t_1 + \tfrac{1}{2} g h. \quad (5)$$

An diese Form der Gleichung können wir nun eine merkwürdige und für alles weitere fundamentale Folgerung anschließen. *Wir können nämlich in ihr* $h = 0$ setzen, mit anderen Worten, wir können den Zeitraum, für den wir die mittlere Geschwindigkeit suchen wollen, auf Null reduzieren. Eine bestimmte Vorstellung können wir mit diesen Worten nicht mehr verbinden; aber in der Formel (5) liegt gar keine Schwierigkeit, die verhindern würde, daß wir in ihr nachträglich $h = 0$ setzen. Man hat wohl gesagt: es sieht beinahe so aus, als ob die Formel mehr könnte als der Verstand. Was wir dann erhalten, das *nennen* wir die augenblickliche Geschwindigkeit oder kurz *„die Geschwindigkeit"* unseres Punktes zur Zeit t_1; wir wollen sie zunächst mit c_1 bezeichnen, sodaß wir erhalten:

$$c_1 = g t_1.$$

[1]) Wegen der Indices vergleiche man die Fußnote auf p. 25.

In dieser Formel kommen jetzt nur noch Größen vor, die sich alle auf denselben Zeitmoment beziehen; es ist daher nicht mehr erforderlich, in ihr den Index 1, der nur zur Unterscheidung eingeführt war, beizubehalten. Wir können also einfach schreiben:

$$c = gt \tag{6}$$

und diese Gleichung so aussprechen: *Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Punktes wächst proportional mit der Zeit.*

Um zu resumieren: *die Geschwindigkeit eines beweglichen Punktes für irgend einen Zeitmoment t ist folgendermaßen definiert: wir berechnen erst die mittlere Geschwindigkeit des Punktes während des Zeitraumes von t bis $t + h$ und setzen in dem gefundenen Ausdruck nachträglich $h = 0$.*

Wir müssen aber doch noch genauer zusehen, was wir damit eigentlich tun. Beim Übergang von der Gleichung (2) zu der Gleichung (3) haben wir mit h, das damals noch $t_2 - t_1$ hieß, dividiert. Wir haben also eine Größe gleich Null gesetzt, mit der wir vorher dividiert hatten. In den Elementen der Algebra wird aber doch gelehrt: *Mit Null darf man nicht dividieren.* Wie ist das nun hier? Die auf diese Frage zu gebende Antwort können wir in 5 Nummern zerlegen:

I. Wir können uns zur Rechtfertigung dessen, was wir getan haben, einfach darauf berufen, *daß etwas bestimmtes dabei herauskommt.* Als Mathematiker haben wir es in der Hand, uns unsere Probleme frei zu wählen; wir sind berechtigt zu sagen: wir interessieren uns nun einmal für dieses Problem und wollen uns mit ihm beschäftigen; und wer sich nicht dafür interessiert, der ist ja nicht gezwungen, sich an unseren Untersuchungen zu beteiligen. Dabei müssen wir freilich fragen: kommt denn unter allen Umständen durch die nachträgliche Nullsetzung der Differenz zwischen zwei zuerst als verschieden angenommenen Werten einer Variablen etwas bestimmtes heraus, bezw. unter welchen Umständen ist das der Fall? aber wir können diese Frage vorläufig ganz bei Seite lassen, bis wir an einzelnen Beispielen für die eine oder die andere Möglichkeit Erfahrungen gesammelt haben.

Wer abstrakt mathematisch denkt, wird sich mit dieser Formulierung vollständig zufrieden geben können; nicht so, wer die Mathematik um ihrer Anwendungen willen studieren will. Dieser wird sich nicht damit begnügen, wenn man ihm sagt: es kommt

überhaupt etwas mathematisch bestimmtes dabei heraus; sondern er wird fragen: kommt denn etwas naturwissenschaftlich ersprießliches dabei heraus? Darauf können wir zunächst antworten:

II. Die Gleichung (6) ist einfacher als die Gleichung (5); wir bekommen ein einfacheres Naturgesetz, wenn wir nach der Abhängigkeit der *augenblicklichen* Geschwindigkeit eines frei fallenden Punktes von der Zeit fragen, als wenn wir dieselbe Frage für die *mittlere* Geschwindigkeit während eines bestimmten Zeitraumes stellen. In unserem Beispiel, bei welchem wir an und für sich schon sehr einfache Verhältnisse angenommen haben, ist ja der dadurch erzielte Gewinn an Einfachheit nicht beträchtlich; aber man kann sich doch auch bereits hier sehr wohl denken, daß in an und für sich schon komplizierteren Fällen durch die eine Formulierung der anderen gegenüber ein ganz beträchtlicher Gewinn an Einfachheit erzielt werden kann.

Aber auch gegen diese Auffassung läßt sich vom streng empirisch-naturwissenschaftlichen Standpunkt noch ein Einwand erheben: was hilft uns der Gewinn an Einfachheit der mathematischen Formulierung, wenn wir, um ihn zu erreichen, genötigt sind, in unsere Rechnungen eine Größe einzuführen, die sich direkt naturwissenschaftlich gar nicht fassen, nicht beobachten, nicht messen läßt. Denn was wir beobachten und messen können, ist doch immer nur die mittlere, durchschnittliche, niemals die hier definierte augenblickliche Geschwindigkeit. Auf diesen Einwand ist zu erwidern:

III. Der Fehler $^1/_2\, gh$, den wir begehen, wenn wir die mittlere Geschwindigkeit während eines kleinen Zeitraums h durch die augenblickliche Geschwindigkeit zu Beginn dieses Zeitraums ersetzen, ist nur klein, wenn h sehr klein ist. Wenn h nur einen kleinen Bruchteil einer Sekunde beträgt, beträgt $^1/_2\, gh$ nur einige Dezimeter (in der Sekunde), kommt also gegenüber den Hunderten von Metern in der Sekunde, auf die wir schon nach den ersten Sekunden Fallzeit kommen, praktisch nicht in Betracht. Wir können ja doch alle naturwissenschaftlichen (physikalischen, chemischen u. s. w.) Größen nur mit einer gewißen begrenzten Genauigkeit messen, ja sie in den meisten Fällen nur mit begrenzter Genauigkeit überhaupt definieren; wir können auch störende Einflüsse (im vorliegenden Fall Luftwiderstand, Einfluß elektrischer, ev. auch magnetischer Kräfte u. s. w.) nie ganz ausschließen. Wir können daher auch nie auf absolute Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zählen. Wenn

wir Fallversuche mit dem Chronographen anstellen, so können wir die Längen, wenn es gut geht, vielleicht auf Millimeter, die Zeit vielleicht bis auf hundertstel Sekunden genau messen, also beide Arten von Größen vielleicht bis auf 5, allerhöchstens 6 geltende Stellen; die aus ihnen zu berechnenden Geschwindigkeiten sind dann sicher nicht mit größerer, eher mit noch geringerer (relativer) Genauigkeit bestimmt. Es hat also gar keinen Zweck, die Rechnung genauer zu führen, als die Beobachtungen sein können: sobald wir für h einen so kleinen Bruchteil von t nehmen, daß wir ihn bei diesen Anforderungen an die Genauigkeit vernachlässigen können, dürfen wir auch ohne jedes Bedenken die mittlere Geschwindigkeit zwischen t und $t+h$, die das eigentlich physikalisch greifbare ist, durch die augenblickliche Geschwindigkeit zur Zeit t ersetzen, die ein einfaches mathematisches Gesetz befolgt.

Diese Verhältnisse sind bei dem besprochenen Beispiel noch etwas dadurch verdunkelt, daß der Faktor g einen verhältnismäßig großen Zahlwert hat. Man beachte aber, daß das nur an den gewählten Einheiten liegt: hätten wir eine größere Längen- oder eine kleinere Zeiteinheit gewählt, so würden wir einen kleineren Zahlwert für diesen Faktor bekommen haben.

IV. Mit dieser Auffassung der Sache ist nun aber wieder der Mathematiker nicht zufrieden; denn sie genügt nicht der Forderung *absoluter Genauigkeit,* die der Mathematiker an seine Sätze und Formeln zu stellen gewohnt ist. Eine genauere Erörterung dieser Forderung und der aus ihr sich ergebenden Konsequenzen muß den besonderen Vorlesungen für Mathematiker vorbehalten bleiben; hier sei nur folgendes über sie bemerkt:

Die Forderung absoluter Genauigkeit stellt ein Ideal auf, zu dem man hinstreben, das man aber in vielen Fällen nicht erreichen kann: schon nicht, wenn man einen gewöhnlichen Bruch, dessen Nenner andere Primfaktoren als 2 und 5 enthält, durch einen Dezimalbruch ersetzen will, noch weniger, wenn man sich zur Einführung irrationaler Zahlen entschließt, wozu doch die Geometrie nötigt. Wenn wir statt $1/3$ setzen:

$$0{,}333333\ldots$$

so mögen wir soviele Dreien hinschreiben wie wir wollen, es bleibt doch immer ein Fehler von $1/3$ Einheit der letzten angeschriebenen Dezimalstelle übrig. Ebenso: der pythagoreische Lehrsatz ergibt,

daß das Quadrat über der Diagonale eines Quadrats von der Seitenlänge 1 die Fläche 2 hat. Verlangen wir also die Länge dieser Diagonale durch eine Zahl auszudrücken, so müssen wir nach einer solchen fragen, die mit sich selbst multipliziert gerade 2 ergibt. Nun kann man zwar nach elementarer Methode leicht Zahlen finden, deren Quadrat sehr wenig von 2 abweicht, z. B. ist

$$1{,}414^2 = 1{,}999396;$$

aber es ist ohne Schwierigkeit zu zeigen und wird gewöhnlich schon in den Schulen gezeigt, daß es keine rationale Zahl geben kann, deren Quadrat genau gleich 2 wäre.

Man ist daher in solchen Fällen genötigt, von der Forderung *absoluter* Genauigkeit abzustehen und sie durch die weniger weit gehende Forderung *unbegrenzter* Genauigkeit zu ersetzen. D. h. wir verlangen alle unsere Formeln so einzurichten, daß sie erlauben, den unvermeidlichen Fehler wenigstens *so klein zu machen, als wir nur immer wollen, oder als von uns verlangt wird.* In den genannten Beispielen ist das in der Tat erreicht: man hat Methoden, um systematisch eine Dezimalstelle des Resultats nach der andern zu bestimmen; und da der Fehler jedesmal höchstens eine Einheit derjenigen Dezimalstelle beträgt, bei der man abbricht, so hat man es in der Hand, den Fehler so klein zu machen, als es nur immer erwünscht erscheinen mag — selbstverständlich vorausgesetzt, daß man die dazu erforderliche Arbeit zu leisten imstande und bereit ist, wonach aber der Mathematiker als solcher nicht fragt, wenigstens nicht in erster Linie.

Wie steht das nun in unserem Falle? Der Fehler, den wir begehen, wenn wir die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit h durch die augenblickliche Geschwindigkeit zu Beginn dieser Zeit ersetzen, beträgt $^1/_2 gh$. Wollen wir erreichen, daß dieser Fehler kleiner wird, als irgend eine vorgeschriebene Genauigkeitsgrenze ε, so brauchen wir dazu nur

$$h < \varepsilon/(2g)$$

zu nehmen. Wir können also im vorliegendem Falle den Fehler in der Tat unter jede vorgeschriebene Genauigkeitsgrenze herabdrücken, wenn wir nur das h hinlänglich klein nehmen.

Ob das nun immer gilt, darüber brauchen wir uns vorläufig noch keine Sorgen zu machen. Wir können es ganz dahin gestellt sein lassen, ob wir denn immer eine bestimmte „augenblickliche Ge-

schwindigkeit“ erhalten, wenn wir bei einer vielleicht sehr unregelmäßigen und stoßweisen Bewegung erst einen Ausdruck für die mittlere Geschwindigkeit während eines Zeitintervalls ableiten und dann in diesem Ausdruck die Dauer des Intervalls gleich Null setzen; und wir können es auch noch dahingestellt sein lassen, ob es in allen Fällen, in welchen das erste wirklich eintritt, auch möglich ist, den Unterschied zwischen der mittleren und der augenblicklichen Geschwindigkeit dadurch unter jede vorgegebene Grenze herabzudrücken, daß wir das Zeitintervall hinlänglich klein nehmen. Aber so viel können wir schon jetzt sagen: für naturwissenschaftliche Zwecke reicht es erfahrungsgemäß aus, wenn wir diejenigen Fälle, in denen die eine oder die andere dieser Voraussetzungen nicht erfüllt ist, von unseren Betrachtungen ausschließen.

V. Nun müssen wir zum Schluß unserer Debatte aber doch noch einmal dem Naturforscher das Wort geben. Der wird sagen: für unbegrenzte Genauigkeit habe ich gar kein Interesse; meine Beobachtungen haben ein bestimmtes Maß von Genauigkeit, das allerdings je nach den verschiedenen Wissenschaften sehr verschieden ist, und es würde meinem Interesse am besten entsprechen, wenn alle Formeln so eingerichtet wären, daß sie gerade diese Genauigkeit, nicht mehr und nicht weniger, aufweisen. Darauf ist zu sagen: das wäre sehr schön, wenn man das so einrichten könnte; aber das geht nicht. Wenn wir immer eine Formel aus der anderen ableiten, so nimmt mit jedem folgenden Schritt die Genauigkeit ab; wir müssen also notwendig die ersten Formeln einer längeren Entwicklung mit größerer Genauigkeit haben, als wir vom Schlußresultat verlangen; und so oft wir einen neuen Schritt nach vorwärts tun wollten, müßten wir die ganze Rechnung wieder von Anfang vornehmen, um im Resultat die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Es bleibt also doch dabei: der einfachste Weg, um zu praktisch verwendbaren Resultaten zu gelangen, ist, daß man erst die Sätze so einrichtet, daß sie unbegrenzte Genauigkeit zu erreichen gestatten, und dann im einzelnen Fall die erforderliche Spezialisierung vornimmt. So werden wir z. B. mit Formeln zu tun bekommen, die beliebige Genauigkeit liefern, wenn man nur eine hinlängliche Anzahl von nach einem bestimmten Gesetze gebildeten Gliedern addiert. Wie viele Glieder man dann im einzelnen Falle braucht, muß Sache spezieller, von einer Kenntnis der in diesem Falle vorliegenden Verhältnisse ausgehender Überlegung

sein und ist eben deshalb ein Geschäft, das der Mathematiker dem Naturforscher oder Techniker nicht vollständig abnehmen kann; um so weniger, als die Anforderungen an die Genauigkeit nichts ein für allemal festliegendes sind, sondern in jeder Wissenschaft sich im Laufe der Zeit immer mehr steigern.

§ 6. Übertragung des Begriffes der Geschwindigkeit auf andere Vorgänge.

Der in den beiden letzten Paragraphen entwickelte Begriff der Geschwindigkeit läßt sich von der geradlinigen Bewegung eines Punktes auf alle andern Vorgänge übertragen, bei denen sich irgend eine Größe im Laufe der Zeit ändert.

Wenn z. B. ein Körper sich um eine feste Achse dreht, so können wir seine Lage in jedem Augenblick dadurch beschreiben, daß wir den Winkel angeben, den eine in dem Körper festgelegte Ebene durch die Achse mit einer im Raume festen Ebene einschließt, die ebenfalls durch die Achse geht. Dieser Winkel ändert sich während der Bewegung; dividieren wir die Größe seiner Änderung während einer gewissen Zeit durch die Dauer dieser Zeit (die Anzahl der Grade durch die Anzahl der Sekunden), so erhalten wir die *mittlere Winkelgeschwindigkeit* während dieser Zeit; setzen wir nachher die Länge des Zeitraums gleich Null, so erhalten wir die *augenblickliche Winkelgeschwindigkeit.*

Betrachten wir ferner Wellen, die sich auf der Oberfläche eines Gewässers ausbreiten. Bei einer solchen Wellenbewegung bleiben die einzelnen Wasserteilchen im wesentlichen an ihrer Stelle, bezw. sie beschreiben nur kleine, geschlossene Kurven. Was fortschreitet, ist nur ein Bewegungszustand. Wir mögen etwa den Wellenkamm (der in jedem Augenblick von andern Wasserteilchen gebildet wird) ins Auge fassen und zusehen, wo er sich befindet: er ändert seine Lage im Raume fortwährend. Dividieren wir die Maßzahl der Strecke, um die er während einer gewissen Zeit fortgerückt ist, durch die Maßzahl dieser Zeit, so erhalten wir die *mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit* des Wellenzugs während dieser Zeit; setzen wir nachträglich diese Zeit gleich Null, so erhalten wir die *augenblickliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit.*

Auch wo es sich nicht um Bewegungen, sondern um Änderungen irgend einer andern meßbaren Größe handelt, können wir

von Geschwindigkeit reden. So erhalten wir z. B. die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit eines Körpers während einer gewissen Zeit, wenn wir die Anzahl der Grade, um die seine Temperatur abgenommen hat, durch die Anzahl der Sekunden dividieren, die dazu erforderlich war.

Auch ein chemischer Prozeß, bei dem ein Element oder ein Radikal aus einer Verbindung aus- und in eine andere eintritt, vollzieht sich nicht instantan, sondern bedarf einer gewissen Zeit. Ein Maß für die umgesetzte Menge würde uns zunächst etwa die Anzahl der Gramme sein können, die sich von der entstehenden Verbindung gebildet haben; für die Rechnung ist es bequemer, diese Zahl noch durch das Molekulargewicht der betr. Substanz zu dividieren. Unter einer *Grammolekel* versteht man diejenige Anzahl von Grammen einer Substanz, die gleich ist ihrer Molekulargewichtszahl; z. B. ist eine Grammolekel Chlor gleich 71 Gramm, eine Grammmolekel Wasserstoff gleich 2 Gramm, eine Grammolekel Salzsäure gleich 36,5 Gramm, so daß also eine Grammolekel Wasserstoff und eine Grammolekel Chlor zusammen zwei Grammolekeln Salzsäure geben. Wir erhalten dann die *mittlere Reaktionsgeschwindigkeit,* wenn wir die Anzahl der umgesetzten Grammolekeln durch die Anzahl der dazu erforderlichen Sekunden dividieren; die *augenblickliche Reaktionsgeschwindigkeit,* wenn wir in der gefundenen Formel nachträglich die Anzahl der Sekunden gleich Null setzen.

Statt „wir dividieren die Maßzahl einer Länge durch die Anzahl von Sekunden", was die eigentlich korrekte aber umständliche Ausdrucksweise ist, sagt man auch bloß „wir dividieren eine Länge durch eine Zeit und erhalten eine Geschwindigkeit". Man kann diese Ausdrucksweise dadurch rechtfertigen, das man sagt: wir legen hier dem Wort „dividieren" eine erweiterte Bedeutung bei. — Entsprechendes gilt für die übrigen in diesem Paragraphen besprochenen Fälle.

§ 7. Graphische Darstellung von Naturgesetzen und überhaupt von Beziehungen zwischen zwei veränderlichen Größen.

In § 2 haben wir gesehen, daß wir eine Beziehung zwischen zwei veränderlichen Größen, z. B. ein Naturgesetz, in vielen Fällen durch eine Formel darstellen können. Eine Formel ist ein ausgezeichnetes Hilfsmittel für den, der mit ihr zu operieren gewohnt

ist; aber wir haben nicht immer eine solche zur Verfügung. Sie kann Resultat einer theoretischen Überlegung sein; aber wir haben nicht für alle Erscheinungen eine vollkommen genügende Theorie. Oder sie kann aus den Beobachtungen direkt abgelesen sein; aber aus Beobachtungen eine Formel abzulesen ist eine besondere Kunst, auf die wir bei späterer Gelegenheit noch einmal zu sprechen kommen müssen. Und natürlich ist man in beiden Fällen nur dann imstande, eine einfache, die Beobachtungen verknüpfende Formel zu finden, wenn eine solche einfache existiert, was keineswegs immer der Fall ist. Was kann man nun in solchen Fällen tun, um wenigstens einigermaßen einen Ersatz zu haben?

Das nächstliegende würde sein, wie schon in § 2 erwähnt, daß man einfach die beobachteten zusammengehörigen Werte der beiden Veränderlichen in Tabellenform nebeneinander schreibt. So wurde z. B. bei einer Beobachtungsreihe über die Einwirkung von Licht auf Chlorknallgas gefunden, daß sich nach den folgenden Anzahlen t von Minuten die beigesetzten Mengen m von Salzsäure gebildet hatten:

$t = 4$	$m = 2{,}1$
$t = 5$	$m = 2{,}6$
$t = 6$	$m = 4{,}7$
$t = 7$	$m = 19{,}3$
$t = 8$	$m = 48{,}5$
$t = 9$	$m = 79{,}6$
$t = 10$	$m = 110{,}0.$

Es würde nicht leicht sein, aus dem bloßen Anblick dieser Tabelle eine Formel abzulesen: die m sind sicher keiner Potenz der t proportional, man müßte also jedenfalls eine mehrgliedrige Formel suchen.

Aber aus der bloßen Tabelle ist direkt auch nicht viel zu entnehmen: sie gewährt vor allem kein anschauliches Bild des Vorgangs.

Man kennt jedoch seit langem, schon seit der letzten Zeit der mittelalterlichen Scholastik, ein einfaches Verfahren, um solche Zahlenreihen dem Auge anschaulich zu machen. Wir ziehen zu diesem Zwecke irgendwo eine gerade Linie, — gewöhnlich horizontal, obwohl das ganz nebensächlich ist —, wählen auf dieser irgendwo einen Anfangspunkt und eine Längeneinheit und tragen nun vom Anfangspunkt soviele Längeneinheiten auf der Geraden in willkürlich ge-

wählter Richtung, gewöhnlich nach rechts hin, auf, als einer der in Betracht kommenden Werte der einen Variabeln besagt. In dem so erhaltenen Endpunkte errichten wir auf der Geraden eine Senkrechte, gewöhnlich nach oben, und tragen auf dieser den zugehörigen Wert der andern Variabeln in einer ebenfalls willkürlich gewählten Einheit auf. In dieser Weise verfahren wir mit jedem Paar zusammengehöriger Werte, indem wir dabei natürlich die einmal getroffene Verfügung über die willkürlich zu wählenden Elemente der Darstellung (Richtungen und Maßstäbe) beibehalten. So erhalten wir zunächst die gegebenen Zahlwerte dargestellt durch eine *Reihe von Punkten* in der Ebene der Zeichnung.

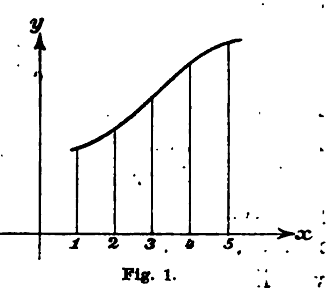


Fig. 1.

Mit diesem allen sind wir nun noch nicht über das bisherige hinausgekommen; Tabelle und Punktreihe können einander vollständig vertreten, die eine sagt nicht mehr und nicht weniger aus als die andere, sobald wir den Maßstab so gewählt haben, daß die Genauigkeit der Zeichnung und die der Beobachtung gerade einander entsprechen. Nun aber tun wir einen Schritt, der eigentlich ein großer Gedankensprung ist: wir ziehen durch die konstruierten Punkte aus freier Hand oder mit Hilfe eines Kurvenlineals eine möglichst regelmäßig verlaufende Kurve und nehmen nun an, daß nicht nur die zuerst konstruierten, sondern auch alle übrigen Punkte dieser Kurve zusammengehörige Werte von t und m vorstellen. Wenn wir zu wissen wünschen, wieviel Salzsäure nach einer nicht in der Tabelle enthaltenen (etwa gebrochenen) Zahl von Minuten umgesetzt ist, so brauchen wir nur die betreffende Zahl t von Einheiten des angenommenen Maßstabes auf der zuerst gezogenen Geraden von dem gewählten Anfangspunkt abzutragen, in dem Endpunkt eine Senkrechte zu errichten und auf dieser das Stück bis zum Durchschnitt mit der Kurve abzumessen, um den zu dem gewählten t gehörenden Wert von m zu erhalten.

Welches Recht haben wir dazu? *Mathematisch* gesprochen *gar keines*; denn wir können doch durch die gegebenen Punkte sehr viele verschiedene Kurven ziehen, selbst wenn wir einen einigermaßen regelmäßigen Verlauf zur Bedingung machen. Aber *naturwissenschaftlich* steht die Sache doch anders. Gemäß dem Prinzip,

daß *die Natur keine Sprünge macht* — das Voraussetzung aller Naturwissenschaft ist — dürfen wir annehmen, daß auch für solche Werte von t, die *zwischen* den beobachteten liegen, die zugehörigen Werte von m *zwischen* den zu den ersteren gehörenden liegen; wenigstens wenn wir die Beobachtungen hinlänglich dicht beieinander gewählt haben, was nach den Umständen des einzelnen Problems zu beurteilen sein wird. In vielen Fällen werden wir diesen Schluß noch dadurch unterstützen können, daß wir zwischen den Zeiten, zu denen wir Messungen anstellen, die Erscheinung wenigstens qualitativ verfolgen. Im vorliegenden Fall werden wir leicht konstatieren können, daß fortwährend Salzsäure neu gebildet, nicht etwa dazwischen die schon gebildete wieder zersetzt wird, und daraus schließen müssen, daß zu größeren Werten von t auch immer größere Werte von m gehören müssen, daß also unsere Kurve, die die Erscheinung darstellen soll, von links nach rechts fortwährend steigen muß und nicht etwa dazwischen fallen kann.

In der Tat: wir können die Beziehung zwischen der Kurve und dem Gesetz, das die beiden Variabeln t und m verbindet, noch ins einzelne verfolgen; dabei werden wir uns eines schon in § 4 eingeführten Ausdrucks bedienen und davon reden, daß hier m eine *Funktion* von t ist. Wir wollen uns die Kurve immer von links nach rechts durchlaufen denken; nämlich in derjenigen Richtung, in der nach unserer Verabredung die wachsenden t aufzutragen sind. Dann können wir sagen: Steigt die Kurve, so nimmt die Funktion mit wachsendem t zu; fällt sie, so nimmt die Funktion mit wachsendem t ab. Steigt die Kurve steil an, so nimmt die Funktion rasch zu; steigt die Kurve flach, so ändert sich die Funktion nur langsam. Dabei ist aber zu beachten, wie wir den Maßstab der t einerseits, der m andererseits in der Figur gewählt haben; wir können eine beliebig steil ansteigende, bezw. fallende Kurve erhalten, wenn wir, bei festgehaltenem Maßstab für die eine Größe, für die andere eine sehr große Maßeinheit wählen. Die Maßstäbe müssen also, wenn eine solche Figur beurteilt werden soll, jedesmal angegeben sein (vgl. S. 20).

Ähnliches gilt nun auch, wenn nicht eine Tabelle zusammengehöriger Beobachtungen, sondern eine Formel gegeben ist, die zusammengehörige Werte zweier Variabeln verbindet. Auch hier können wir zu einer Reihe von Werten der einen, die auf einer Achse aufgetragen sind, die dazugehörenden Werte der andern senk-

recht abtragen und durch die erhaltenen Punkte eine Kurve legen. Wir können in diesem Falle uns sogar denken, wenn auch nicht vorstellen, daß wir zu *jedem* in Betracht kommenden x das zugehörige y berechnet und eingetragen haben und dann die Gesamtheit dieser Punkte ins Auge fassen. Wenn die Beziehung zwischen x und y genügend einfachen Charakter hat, werden wir annehmen dürfen, daß diese Punkte nicht ganz regellos in der Ebene verstreut liegen, sondern sich zu einer bestimmten geraden oder krummen Linie zusammenschließen; ob das auch noch gilt, wenn das Abhängigkeitsgesetz zwischen x und y von sehr kompliziertem Charakter ist, das können wir vorläufig dahingestellt sein lassen.

§ 8. Umkehrung dieser Betrachtung; analytische Darstellung von Linien.

In der eben durchgeführten Betrachtung war eine Beziehung zwischen zwei Veränderlichen, mochte sie nun durch eine Tabelle oder durch eine Formel dargestellt sein, das gegebene, die Kurve diente uns zur Veranschaulichung, wir schlossen aus den Eigenschaften der Kurve auf die Eigenschaften der zugehörigen Funktion. Wir können das aber auch umkehren: wenn uns eine Linie irgendwie geometrisch definiert ist, so können wir fragen, durch welche Gleichung sie im Sinne von § 7 repräsentiert wird, und nun umgekehrt aus Eigenschaften der Gleichung auf diejenigen der Kurve schließen. Dieses Verfahren, das schon den antiken Geometern nicht ganz fremd war und dann in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts von Fermat und namentlich von Descartes ausgebildet worden ist, nennt man *analytische Geometrie.* Wir müssen wenigstens ihre ersten Elemente hier kennen lernen.

Wir nehmen irgendwo in der Zeichnungsebene zwei einander schneidende Gerade an; es ist nicht unbedingt nötig, aber in den meisten Fällen zweckmäßig, sie zueinander rechtwinklig anzunehmen. Die eine nennen wir die Abszissenachse oder kürzer die Achse der x (x-Achse), die andere die Ordinatenachse oder die Achse der y (y-Achse); ihren Schnittpunkt O den Ursprung oder den Nullpunkt des Koordinatensystems. Man pflegt die x-Achse horizontal, die y-Achse vertikal anzunehmen; doch ist das ganz nebensächlich. Sie teilen zusammen die Ebene in vier Teile, Quadranten (vgl. Fig. 6, S. 27); wir wollen zunächst nur den einen von diesen ins Auge fassen, etwa den in

der Figur rechts oben gelegenen. Wir können dann jeden Punkt dieses Winkelraums dadurch festlegen, daß wir *zwei Zahlen* angeben, nämlich die Maßzahlen seiner Entfernung QP von der x-Achse, d. h. die Länge des von P auf diese Gerade gefällten Lotes, und der Entfernung OQ vom Ursprung bis zum Fußpunkt dieses Lotes. Die letztere Zahl nennen wir das x des Punktes oder seine *Abszisse* (Abgeschnittene), die letztere das y des Punktes oder seine *Ordinate* (als Abkürzung des älteren Ausdrucks „ordinatim applicata“); beide zusammen seine *Koordinaten*, genauer seine *rechtwinkligen kartesischen* Koordinaten:

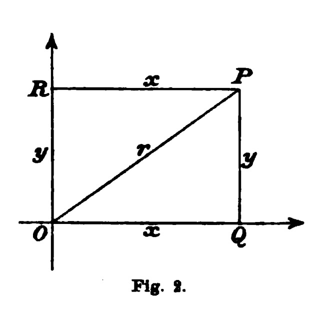


Fig. 2.

$$OQ = x, \qquad QP = y.$$

Ziehen wir noch PR parallel zu QO, also senkrecht zu OR, so ist nach elementargeometrischen Sätzen auch

$$OR = y, \qquad RP = x;$$

wir hätten eine symmetrische Behandlung der beiden Achsen, wenn wir etwa RP und QP als Koordinaten definiert hätten, doch ist von dem Standpunkte aus, von dem wir hier zu diesen Fragen gelangt sind, die Bevorzugung der einen Achse vor der andern zunächst natürlich.

Sind umgekehrt zwei positive Zahlen x und y gegeben, so können wir in unserem Winkelraum stets einen und nur einen Punkt ausfindig machen, dessen Abszisse gerade gleich diesem x und dessen Ordinate gerade gleich diesem y ist.

Die Entfernung des Punktes (x, y) vom Ursprung ist nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

der Winkel α, den die Verbindungslinie mit der x-Achse einschließt, ist bestimmt durch:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Sind zwei Punkte durch ihre Koordinaten gegeben, so können wir ihre Entfernung voneinander auf Grund der in den nebenstehenden Figuren gezogenen Hilfslinien ebenfalls mit Hilfe des

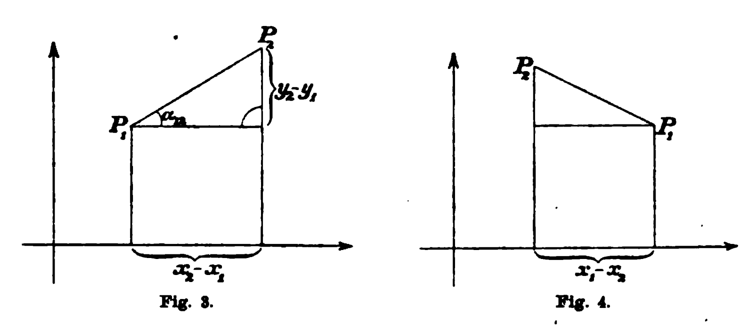


Fig. 3. Fig. 4.

pythagoreischen Lehrsatzes berechnen. Wir erhalten für die erste Figur[1]):

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \tag{3}$$

für die zweite:

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Wir können aber die erste Formel auch für den zweiten Fall benutzen, da ja:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$$

ist.

Der Winkel α_{12}, den die Verbindungslinie mit der Parallelen zur x-Achse, also auch mit dieser selbst einschließt, ist in der ersten Figur bestimmt durch:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \sin \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \qquad \cos \alpha_{12} = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}; \tag{4}$$

die Verhältnisse der zweiten Figur wollen wir erst später besprechen.

Ist nun irgend eine Linie geometrisch definiert, so können wir aus dieser Definition eine Beziehung ableiten, die zwischen den Koordinaten aller Punkte der Linie, und nur dieser Punkte besteht. Diese Beziehung wird sich durch eine Gleichung ausdrücken; das nennen wir dann die *Gleichung der Kurve.*

Umgekehrt, wenn eine solche Gleichung gegeben ist, so können wir, wie schon im vorigen Paragraphen erörtert, die Punkte aufsuchen, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. In den Fällen, mit denen wir zu tun haben, schließen sich diese Punkte zu einer bestimmten Linie zusammen, durch die dann die vorgelegte Gleichung geometrisch dargestellt wird.

---

[1]) Zwischen den Indices 1, 2 müßte eigentlich ein Komma stehen, damit man nicht „r mit dem Index zwölf" liest; indessen kann das Komma auch wegbleiben, wenn keine solche Verwechslung zu befürchten ist.

Wo liegen z. B. diejenigen Punkte, für die $y = x$ ist, die also von der einen Achse gerade so weit entfernt sind wie von der andern? In den Elementen der Geometrie wird schon gelehrt, daß diese Punkte alle auf der Halbierungsgeraden des Winkels zwischen den Achsen liegen, und daß alle Punkte dieser Geraden die verlangte Eigenschaft haben. Wir drücken beides zusammen dadurch aus, daß wir sagen: die Gleichung

$$y = x$$

ist die Gleichung dieser Halbierungsgeraden.

Wo liegen ferner diejenigen Punkte, für die $y = 2x$ ist, die also von der x-Achse gerade doppelt so weit abstehen, wie von der y-Achse? Auch hier kann die Antwort aus einem elementargeometrischen Satze entnommen werden, der sich durch folgende Überlegung ergibt: Sei P_1 ein Punkt, der diese Eigenschaft hat, so daß also $Q_1P_1 = 2OQ_1$ ist; sei P_2 irgend ein Punkt auf der Linie OP_1 oder ihrer Verlängerung über P_1 hinaus. Ziehen wir dann noch die Ordinate P_2Q_2, so sind die Dreiecke

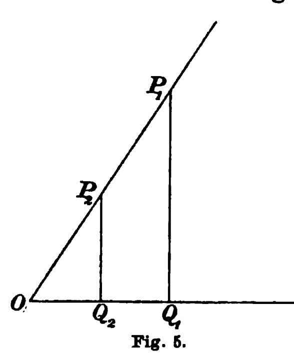


Fig. 5.

$$OP_1Q_1, \quad OP_2Q_2$$

(in dieser Reihenfolge der Ecken) einander ähnlich, und es ist insbesondere $OQ_2 : Q_2P_2 = OQ_1 : Q_1P_1$. Da aber nach Voraussetzung $Q_1P_1 = 2OQ_1$ ist, so folgt, daß auch $Q_2P_2 = 2OQ_2$ sein muß. Der Punkt P_2 hat also ebenfalls die verlangte Eigenschaft, und da er ein ganz willkürlicher Punkt der Verbindungslinie OP_1 oder ihrer Verlängerung war, so folgt, daß *jeder* Punkt dieser Verbindungslinie die verlangte Eigenschaft hat. Kein anderer Punkt kann aber diese Eigenschaft haben; denn sei P_3 ein solcher Punkt, so wird seine Ordinate P_3Q_3, ev. verlängert, die konstruierte Gerade in einem Punkte P_4 schneiden. Dann ist $Q_3P_4 = 2OQ_3$ also kann nicht zugleich auch $Q_3P_3 = 2OQ_3$ sein; w. z. b. w.

§ 9. Negative Werte der Koordinaten.

Bisher haben wir nur Punkte eines Quadranten der Ebene betrachtet und ihnen positive Zahlen als Koordinaten zugewiesen:

jedem Punkt dieses Quadranten entsprach ein Paar solcher Zahlwerte, und umgekehrt. Wollen wir die ganze Ebene beherrschen und dabei doch diese umkehrbare Eindeutigkeit der gegenseitigen Beziehung festhalten, so dürfen wir uns nicht auf positive Zahlen beschränken; denn nehmen wir auf die Seite, in der ein Punkt von einer der Achsen aus liegt, keine Rücksicht, so gibt es nicht nur einen Punkt, sondern vier, die von den beiden Achsen gegebene Abstände haben. Sie gehen aus dem zuerst angegebenen Punkt dadurch hervor, daß man ihn an beiden Achsen spiegelt, und das durch die eine Achse hervorgebrachte Spiegelbild dann noch an der andern. Wie werden wir diese Punkte voneinander unterscheiden können? Das gelingt eben, wenn wir auch negative Zahlen als Koordinaten zulassen. *Wir wollen Abszissen, die vom Anfangspunkt aus nach rechts gemessen sind, wie bisher als positiv, dagegen solche, die nach links gemessen sind, als negativ ansehen. Ebenso wollen wir Ordinaten, die von der Abszissenachse aus nach oben gemessen sind, wie bisher als positiv, dagegen solche, die nach unten gemessen sind, als negativ ansehen;* so daß also z. B. ein Punkt der vom Ursprung aus 3 cm nach links und 2 nach oben liegt, die Koordinaten ($x = -3$, $y = +2$) bekommt. Die Ebene zerfällt dann, wie schon in § 8 erwähnt, durch die Achsen in vier Quadranten; werden diese wie in der Figur numeriert, so ist für die Punkte des

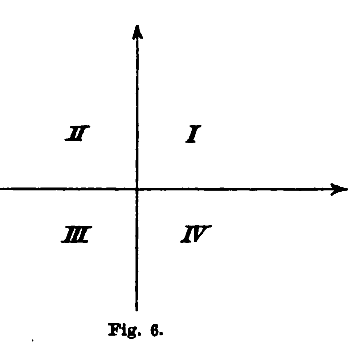


Fig. 6.

I.	Quadranten	x positiv,	y positiv;
II.	„	x negativ,	y positiv;
III.	„	x negativ,	y negativ;
IV.	„	x positiv,	y negativ.

Es kommen also alle vier Kombinationen der beiden Zeichen vor. Damit ist die Eindeutigkeit der Beziehung für die ganze Ebene hergestellt: jedem Paar reeller Zahlen entspricht ein und nur ein Punkt, jedem Punkt ein und nur ein solches Zahlenpaar.

Wesentlich ist übrigens an diesen Verabredungen nicht die spezielle Festsetzung der positiven Richtungen, sondern daß nach entgegengesetzten Richtungen abgetragene Strecken, wie es ja auch sonst sich vielfach empfiehlt, als mit entgegengesetzten Vorzeichen

versehen betrachtet werden. Immerhin werden wir, wo kein besonderer Grund zu einer Abweichung vorliegt, an der hier getroffenen Verabredung über die positiven Richtungen festhalten.

Vor allem müssen wir uns nun fragen, ob denn bei diesen neuen Festsetzungen die Formeln des vorigen Paragraphen, die doch nur unter der Voraussetzung positiver Koordinatenwerte abgeleitet waren, noch Gültigkeit behalten, oder ob wir für jeden Fall besondere Formeln aufstellen müssen. Namentlich müssen wir zusehen, ob denn $x_2 - x_1$ immer die Projektion des Abstandes der beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf die x-Achse vorstellt. Zunächst: sind beide Abszissen positiv, so ist die Projektion jener Differenz jedenfalls absolut genommen, (d. h. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen), gleich; und zwar ist die Differenz positiv oder negativ, je nachdem x_2 größer oder kleiner als x_1 ist, d. h. je nachdem der zweite Punkt rechts oder links vom ersten liegt. Wir können sagen: für zwei Punkte des ersten Quadranten gibt die Differenz $x_2 - x_1$ die Projektion der Verbindungslinie *von* P_1 *nach* P_2 auf die x-Achse auch dem Zeichen nach. Sind x_1 und x_2 beide negativ, so ist die Differenz, ebenfalls absolut genommen, der Projektion gleich; und sie ist positiv, wenn x_2 *algebraisch* größer als x_1 ist. Algebraisch größer heißt aber bei negativen Zahlen *absolut* genommen kleiner. Es gilt also auch hier, daß die Differenz $x_2 - x_1$ positiv ist, je nachdem der Punkt P_1 links oder rechts von P_2 liegt, daß also diese Differenz die Projektion der Verbindungslinie *von* P_1 *nach* P_2 auch dem Vorzeichen nach gibt.

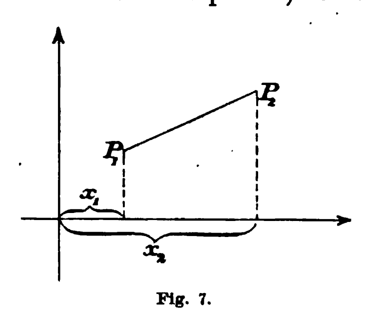


Fig. 7.

Ist x_1 negativ, x_2 positiv, so stellt die Differenz $x_2 - x_1$ die *Summe* der absoluten Beträge der Abszissen der beiden Punkte vor; in diesem Falle ist aber auch wirklich, wie die Figur zeigt, die Projektion der Linie von P_1 nach P_2 positiv und dieser Summe gleich, sodaß die Formulierung auch hier gilt (Fig. 8).

Den Fall endlich, daß x_1 positiv, x_2 negativ ist, können wir auf den eben besprochenen dadurch zurückführen, daß wir x_1 und x_2 vertauschen; bei dieser Vertauschung ändert sich das Vorzeichen der Differenz, aber auch das der Projektion, sodaß die Übereinstimmung beider Vorzeichen bestehen bleibt.

Wir können also zusammenfassend sagen: *Die Differenz $x_2 - x_1$ stellt in jedem Falle die Projektion der Verbindungslinie von P_1 nach P_2 nach Größe und Vorzeichen vor, wie auch die Punkte P_1 und P_2 gegen das Koordinatensystem gelegen sein mögen.*

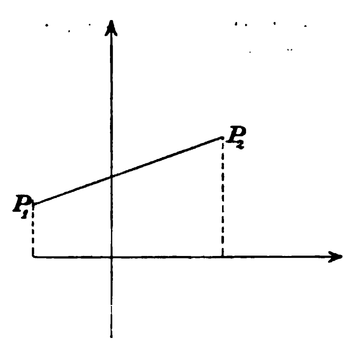


Fig. 8.

Entsprechendes gilt dann auch von der Ordinatendifferenz $y_2 - y_1$.

Daraus folgt weiter, daß die Formel für den Abstand zweier Punkte voneinander (§ 8, 1) auch für jede beliebige Lage der beiden Punkte gilt, indem die beiden Differenzen $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ in jedem Falle die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks vorstellen, von dem die gesuchte Entfernung die Hypotenuse ist.

Bei dieser Frage kommt es auf die Vorzeichen der Differenzen nicht an, da nur ihre Quadrate auftreten; wohl aber kommt es auf diese Vorzeichen an, wenn wir nun fragen, wieweit die Formel § 8 (4) für die Tangente des Neigungswinkels der Verbindungslinie gegen die x-Achse auch in anderen Fällen als dem in § 8 allein betrachteten gilt. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen. Wir haben schon verabredet, daß wir bei einer Strecke (einer begrenzten geraden Linie) Anfangspunkt und Endpunkt unterscheiden und Strecken von entgegengesetzter Richtung als solche von entgegengesetztem Vorzeichen betrachten wollen; eine entsprechende Verabredung müssen wir nun auch für die Winkel treffen. Wir wollen auch bei einem Winkel Anfangs- und Endschenkel unterscheiden und auf den Drehsinn achten, in dem wir den Anfangsschenkel drehen müssen, um ihn in die Lage des Endschenkels zu bringen. Dieser Drehsinn kann ebensowenig wie der Unterschied zwischen einer linken und einer rechten Hand definiert, sondern nur vorgezeigt werden; wir wollen verabreden, denjenigen Sinn, in dem sich die Zeiger einer Sonnenuhr in der nördlichen gemäßigten Zone und infolgedessen auch die Zeiger aller unserer Uhren drehen, als *negativ* zu bezeichnen. Diese Unterscheidung hängt daran, daß wir die Ebene, in der der Winkel gezeichnet ist, von einer bestimmten Seite her betrachten; sie ist übrigens, anders als die entsprechende Festsetzung über den Sinn der Strecken, mit einem Schlage für alle Winkel der Ebene getroffen; und ein Winkel kann

nicht durch bloße Bewegung in der Ebene mit dem entgegengesetzten Winkel zur Deckung gebracht werden.

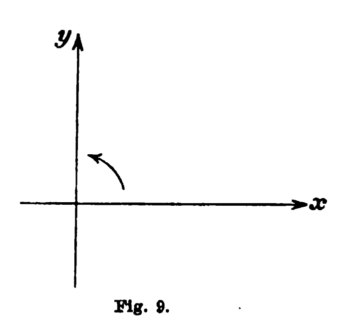


Fig. 9.

Bei unserer Verabredung über die Lage der Koordinatenachsen bedarf es einer Drehung von $+90^0$ oder von -270^0 um die positive x-Achse mit der positiven y-Achse zur Deckung zu bringen.

Außerdem wollen wir uns nicht auf Winkel von unter 90^0 beschränken, sondern in unseren Formeln auch stumpfe und überstumpfe Winkel zulassen. Nun werden in der Goniometrie gewisse Verabredungen über die trigonometrischen Funktionen solcher Winkel getroffen, nach denen z. B. der Sinus im dritten und vierten, der Kosinus im zweiten und dritten, die Tangente im zweiten und vierten Quadranten negativ sein sollen. Auch wird verabredet, daß

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

sein soll. Diese Verabredungen sind dort gerade so getroffen, daß *die Gleichungen* (2) und (4) von § 8 *für alle Fälle Gültigkeit behalten.* Wir können die Sache geradezu so auffassen, wie wenn in der Goniometrie noch nichts hierüber verabredet wäre, und dann jetzt verabreden: unter Sinus, Kosinus, Tangente eines beliebigen Winkels sollen gerade diejenigen Werte auch dem Vorzeichen nach verstanden werden, die sich aus jenen Formeln ergeben, wenn man in ihnen die Abstände r und r_{12} immer positiv, die Koordinatendifferenzen aber mit ihrem Vorzeichen nimmt.

Wir nehmen nun die in § 8 bereits besprochenen Gleichungen von Linien wieder auf, um zuzusehen, wie sie sich verhalten, wenn

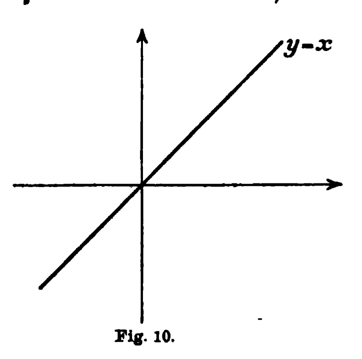


Fig. 10.

auch negative Werte der Koordinaten zugelassen werden. Zunächst die Gleichung $y = x$. Wir sehen: im zweiten und vierten Quadranten können keine Punkte liegen, deren Koordinaten dieser Gleichung genügen; denn die Koordinaten eines Punktes in einem dieser beiden Quadranten haben entgegengesetzte Vorzeichen. Dagegen liegen solche Punkte außer im ersten

noch im dritten Quadranten; und zwar liegen sie auf der Halbierungslinie seines Winkels. Diese Halbierungslinie ist aber die rückwärtige Verlängerung der Halbierungslinie des Winkels des ersten Quadranten. Wir können also sagen: *Lassen wir auch negative Werte der Koordinaten in der verabredeten Weise zu, so liegen alle Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $y = x$ genügen, auf einer und derselben Geraden, nämlich der gemeinsamen Halbierungslinie des ersten und dritten Quadranten; und die Koordinaten aller Punkte dieser Linie erfüllen die Gleichung.* Gleichung und Linie entsprechen sich also gegenseitig vollständig; wir können sagen: *die Gleichung $y = x$ ist die Gleichung der genannten geraden Linie.*

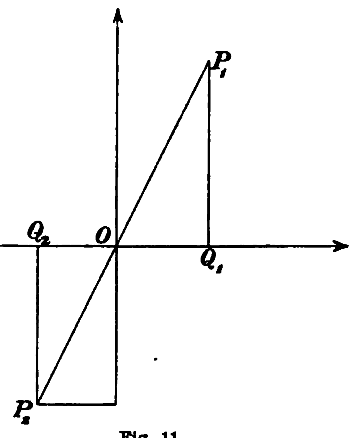


Fig. 11.

Entsprechende Überlegungen können wir nun auch für die Gleichung $y = 2x$ anstellen. Auch für sie kommen Punkte des zweiten und vierten Quadranten nicht in Betracht, wohl aber außer solchen des ersten auch noch solche des dritten. Betrachten wir nun einen Punkt des ersten und einen des dritten Quadranten, deren Koordinaten dieser Gleichung genügen, so zeigt die Figur, daß die Dreiecke OP_1Q_1 und OP_2Q_2 einander ähnlich sind, daß also die drei Punkte P_1, O, P_2 in gerader Linie liegen. Mit andern Worten: alle Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $y = 2x$ genügen, liegen auf einer bestimmten Geraden durch den Ursprung, und die Koordinaten aller Punkte dieser Geraden erfüllen diese Gleichung: *die Gleichung ist die Gleichung der Geraden.*

§ 10. Weitere Beispiele von Gleichungen von Linien.

Man sieht zunächst ohne weiteres, daß bei den letzten Überlegungen der Zahlwert 2 ganz nebensächlich war; wir hätten genau so schließen können, wenn statt 2 irgend ein anderer (nicht einmal notwendig ganzer) Zahlwert gestanden hätte. Wir können sagen: die Gleichung

$$y = mx, \tag{1}$$

in der m einen konstanten Faktor bedeuten soll, ist die Gleichung

einer geraden Linie durch den Ursprung, die unter einem Winkel, dessen Tangente gleich m ist, gegen die positive Richtung der x-Achse geneigt ist.

Ist m positiv, so geht diese Gerade durch den ersten und dritten, ist m negativ, so geht sie durch den zweiten und vierten Quadranten. Ist $m = 0$, so fällt sie mit der x-Achse zusammen; wir merken uns ausdrücklich: $y = 0$ *ist die Gleichung der x-Achse. Ebenso ist* $x = 0$ *die Gleichung der y-Achse.*

Untersuchen wir ferner die Gleichung:

$$y = mx + n. \tag{2}$$

Um *einen* Punkt zu erhalten, dessen Koordinaten dieser Gleichung genügen, suchen wir erst einen Punkt, dessen Koordinaten der Gleichung (1) genügen und vergrößern dann seine Ordinate noch um n. Um *alle* Punkte zu erhalten, deren Koordinaten der Gleichung (2) genügen, suchen wir demgemäß erst alle Punkte, deren Koordinaten der Gleichung (1) genügen, d. h. wir ziehen durch den Ursprung eine Gerade unter einem Winkel gegen die x-Achse, dessen Tangente gleich m ist, und rücken dann diese ganze Gerade parallel mit sich selbst um ein Stück n in der Richtung der y-Achse fort; oder einfacher, wir ziehen zu der ersten Geraden eine Parallele durch den Punkt ($x = 0$, $y = n$). Wir können also sagen:

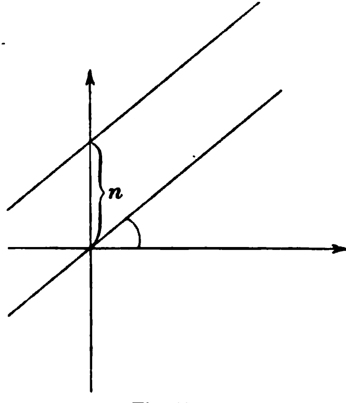


Fig. 12.

Jede Gleichung der Form (2) *stellt eine gerade Linie vor.*

Diesen Satz können wir nun auch umkehren; wir können auch sagen:

Die Gleichung jeder Geraden, die zur Ordinatenachse nicht parallel ist, läßt sich in der Form (2) *schreiben.*

Wir brauchen dazu nämlich nur unter n den Abschnitt zu verstehen, den diese Gerade auf der Ordinatenachse macht, und unter m die Tangente des Winkels, den sie mit der x-Achse einschließt.

Die Gleichung einer *zur Ordinatenachse parallelen Geraden* lautet:

$$x = a, \tag{3}$$

unter a eine konstante Größe verstanden; denn alle Punkte einer solchen Geraden haben dieselbe Abszisse.

Multiplizieren wir alle Glieder einer Gleichung mit einem und demselben konstanten Faktor, so wird dadurch nichts wesentliches an ihr geändert: alle Wertepaare (x, y), die ihr vorher genügten, genügen ihr auch nachher noch. Wir können also die Gleichung (2), indem wir noch alle Glieder auf dieselbe Seite bringen, auch schreiben

$$ax + by + c = 0, \tag{4}$$

unter a, b, c neue Konstante verstanden, die sich aus den vorher benutzten und dem Faktor k, mit dem multipliziert worden ist, in einfacher Weise zusammensetzen: $a = -mk$, $b = k$, $c = -nk$. Diese Form enthält nun auch die Gleichung (3) als Spezialfall unter sich, so daß wir sagen können:

Die Gleichung jeder Geraden ist linear, und jede lineare Gleichung stellt eine Gerade dar.

Man nennt nämlich eine Gleichung dann linear, wenn sie nach Wegschaffung von Wurzeln und Nennern die Veränderlichen nur in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert enthält.

Der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{5}$$

genügen die Koordinaten jedes Punktes, dessen Abstand vom Ursprung gleich r ist. Diese Punkte bilden den Kreis vom Radius r. Also:

Die Gleichung (5) *ist die Gleichung des Kreises vom Radius r um den Ursprung.*

Ebenso ist

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{6}$$

wenn a, b, r konstante Größen bezeichnen, die Gleichung des Kreises vom Radius r um den Punkt (a, b).

Untersuchen wir endlich noch die Gleichung:

$$y = \frac{x^2}{10}. \tag{7}$$

Diese Gleichung stellt weder eine gerade Linie noch einen Kreis vor, sondern eine Kurve, die in den Elementen der Geometrie nicht behandelt zu werden pflegt. Ohne Beweis sei erwähnt, daß man eine solche Kurve erhält, wenn man einen geraden Kreiskegel durch eine Ebene schneidet, die zu einer seiner Seitenlinien parallel ist. Man nennt sie eine *Parabel*, oder, da dieser Name jetzt auch noch

anderen Kurven beigelegt wird, nach dem Namen eines griechischen Mathematikers, der sich mit ihr beschäftigt hat, eine *Apollonische Parabel.* Wir können uns eine Vorstellung von ihrer Gestalt verschaffen, wenn wir zu einer Reihe von Werten des x die zugehörigen y aus der Gleichung berechnen und in eine Figur eintragen:

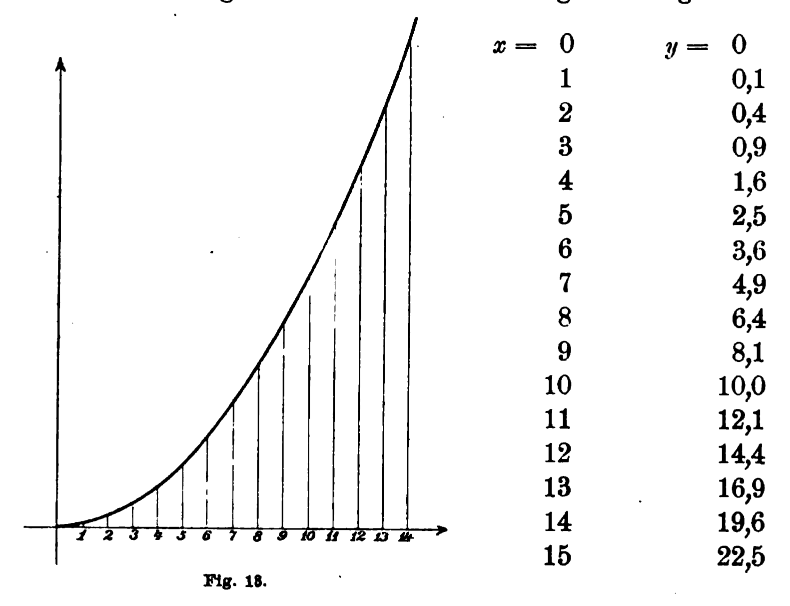


Fig. 18.

$x =$	$y =$
0	0
1	0,1
2	0,4
3	0,9
4	1,6
5	2,5
6	3,6
7	4,9
8	6,4
9	8,1
10	10,0
11	12,1
12	14,4
13	16,9
14	19,6
15	22,5

Einem negativen Wert von x entspricht ein ebenso großes y, wie dem absolut genommen ebenso großen positiven: die Kurve ist gegen die y-Achse symmetrisch.

Will man den Verlauf der Kurve noch genauer haben, so kann man noch Zwischenpunkte einschalten; z. B.

$$\begin{array}{llll} x = 2{,}2 & 2{,}4 & 2{,}6 & 2{,}8 \\ y = 0{,}48 & 0{,}58 & 0{,}68 & 0{,}78. \end{array}$$

§ 11. Das Problem der Tangentenkonstruktion.

In den Elementen der Geometrie wird gezeigt, wie man in jedem Punkte eines Kreises die Tangente oder Berührungslinie an diesen konstruieren kann. Jede durch einen Punkt A eines Kreises gehende Gerade schneidet ihn noch in einem zweiten Punkte und kann daher eine Sekante des Kreises genannt werden; ausgenommen ist allein diejenige Gerade, die mit dem nach A gehenden Radius einen

rechten Winkel einschließt. Diese hat mit dem Kreise keinen weiteren Punkt gemein und wird daher als *Tangente* des Kreises bezeichnet.

Wie läßt sich nun dieser Begriff der Tangente von dem Kreise auf andere krumme Linien übertragen? Von dem rechten Winkel mit dem Radius müssen wir dabei jedenfalls absehen; das ist etwas, was dem Kreise speziell angehört (und sogar dazu dienen könnte, ihn zu definieren).

Auch daß die Tangente mit der Kurve nur einen einzigen Punkt gemeinsam haben soll, daran werden wir nicht festhalten können. Denn einerseits können wir leicht eine Kurve von der Art zeichnen, daß durch einen ihrer Punkte nicht nur eine Gerade geht, die sie in keinem weiteren Punkte trifft, sondern unendlich viele (Fig. 14); andererseits können wir auch leicht eine Kurve so zeichnen, daß auf ihr Punkte vorhanden sind, durch die überhaupt keine Gerade gezogen werden kann, ohne daß sie die Kurve außerdem noch trifft (Fig. 15).

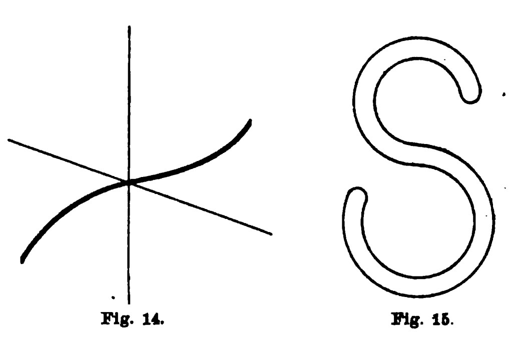


Fig. 14. Fig. 15.

Wir müssen daher, wenn wir zu einer zweckmäßigen Verallgemeinerung gelangen wollen, uns die Verhältnisse beim Kreise noch etwas näher überlegen. Um von Umständlichkeiten wie die zuletzt erwähnte frei zu sein, wollen wir gar nicht eine ganze Kurve als solche ins Auge fassen, sondern nur einen Bogen von ihr auf beiden Seiten des Punktes, an den die Tangente gezogen werden soll; also auch vom Kreis nur einen Kreisbogen. Auf diesem Kreisbogen fassen wir einen Punkt A ins Auge, der nicht gerade ein Endpunkt des Bogens sein soll. Diesen Punkt A verbinden wir zunächst mit den übrigen Punkten des Bogens durch gerade Linien; diese Linien werden dann einen gewissen Winkelraum erfüllen — genauer gesagt, zwei Scheitelwinkelräume; sie liegen nämlich alle zwischen den beiden Geraden, die von A nach den Endpunkten des Bogens gezogen werden können. Umgekehrt trifft jede Gerade

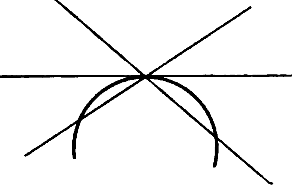


Fig. 16.

dieses Winkelraums, *eine einzige ausgenommen,* den Bogen noch in einem zweiten Punkte; diese einzige ist eben die Tangente in A. Durch diese Tangente wird der Winkelraum, bezw. jeder der beiden Scheitelwinkelräume in zwei Teile zerlegt: jede Gerade durch A, die in den einen dieser Teile fällt, trifft den Bogen noch einmal *links* von A, jede, die in den andern Teil fällt, trifft den Bogen noch einmal *rechts* von A. *Die Tangente in A an den Kreisbogen kann daher auch folgendermaßen definiert werden: sie liegt zwischen denjenigen Geraden durch A, die außerdem noch links schneiden und denjenigen, die außerdem noch rechts schneiden. Der Punkt A heißt Berührungspunkt der Tangente.*

Aber noch mehr: je weniger eine Gerade AB von der Tangente abweicht (einen je kleineren Winkel sie mit der Tangente bildet), desto näher liegt ihr zweiter Schnittpunkt am Punkte A; und umgekehrt: je näher der zweite Schnittpunkt B einer Geraden durch A mit dem Kreise an A liegt, einen desto kleineren Winkel schließt diese Gerade mit der Tangente in A ein.

Diese Betrachtungen lassen sich nun auch auf Bogen anderer Kurven übertragen; sie gelten z. B. ebenso wie für den Kreis auch für die in § 10 betrachtete Apollonische Parabel. Auch bei ihr können wir die Tangente in einem Punkt definieren als die Grenzlage zwischen denjenigen Sehnen durch diesen Punkt, deren zweiter Schnittpunkt rechts, und denjenigen, deren zweiter Schnittpunkt links vom ersten liegt. Überhaupt werden sich ähnliche Überlegungen bei jeder Kurve von einigermaßen regelmäßigem Laufe durchführen lassen, vielleicht einzelne besondere Punkte (Spitzen oder Ecken) ausgenommen. Ob das auch noch gilt, wenn wir eine Kurve etwa als das geometrische Bild eines sehr verwickelten analytischen Abhängigkeitsgesetzes zwischen zwei Variabeln definieren, — diese Frage können wir hier beiseite lassen; bei denjenigen Linien, mit denen wir zu tun bekommen, werden wir sehen, daß es in der Tat der Fall ist.

Wir können nämlich die Aufgabe mit den in den letzten Paragraphen vorbereiteten Hilfsmitteln der analytischen Geometrie folgendermaßen angreifen. Wir nehmen an, die Kurve, an die wir die Tangente konstruieren wollen, sei durch ihre Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten gegeben, und diese Gleichung sei nach y aufgelöst:

$$y = f(x)$$

so daß wir x als unabhängige Variable, y als eine Funktion von ihr

ansehen können. Die Koordinaten des speziellen Punktes, an den wir die Tangente konstruieren wollen, mögen x_1, y_1 heißen. Diesen Punkt sollen wir dann mit einem benachbarten Punkt verbinden; dieser zweite Punkt heiße x_2, y_2. Wir können die Verbindungslinie durch die Tangente des Winkels festlegen, den sie mit der x-Achse einschließt; diese Tangente ist nach § 8, (4) gegeben durch:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

(Daß das eine Wort „Tangente“ hier in zwei ganz verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, ist sehr mißlich, aber nicht zu ändern. Einmal bedeutet es eine *Linie*, nämlich diejenige, die wir gerade untersuchen wollen; das andere Mal bedeutet es eine *Zahl*, nämlich das Verhältnis der beiden Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck. Vielleicht ist es zweckmäßig, zum Unterschied überall da, wo Verwechslungen vorkommen könnten, die letztere Bedeutung durch den Zusatz „trigonometrische Tangente“ zu charakterisieren.)

Z. B. für den zuletzt betrachteten Fall ist:

$$y_2 = \tfrac{1}{10}\, x_2^2, \quad y_1 = \tfrac{1}{10}\, x_1^2,$$

also

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \tfrac{1}{10}\, \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \tfrac{1}{10}\, (x_2 + x_1)$$

oder wenn wir für die Abszissendifferenz $x_2 - x_1$ das Zeichen h einführen:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \tfrac{1}{5}\, x_1 + \tfrac{1}{10}\, h.$$

Ist $h > 0$, d. h. liegt der Punkt 2 rechts von 1, so ist $tg\alpha_{12} > x_1/5$; ist aber $h < 0$, d. h. liegt der zweite Schnittpunkt links vom ersten, so ist $\operatorname{tg} \alpha_{12} < x_1/5$. Diejenige Linie, für die

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_1}{5}$$

ist, trennt also die rechts zum zweiten Male schneidenden Geraden von den links zum zweiten Male schneidenden; *sie ist die gesuchte Tangente an unsere Parabel* in dem Punkte 1.

Die Bestimmung der Tangente in einem Punkte einer Kurve kann uns dazu dienen, die Kurve genauer zu zeichnen, als es bei Benutzung von Punkten allein möglich wäre, wenn wir nicht eine sehr große Anzahl von Punkten benutzen wollen. Soll z. B. die Tangente im Punkte $x = 4$ bestimmt werden, so haben wir etwa mit Hilfe einer Logarithmentafel und der gewöhnlich bei den Logarith-

mentafeln sich findenden Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen folgende Rechnung auszuführen:

$$\log 4 = 0{,}602$$
$$\log 5 = 0{,}699$$

also $$\log 4/5 = 0{,}903 - 1$$

In der Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen sind alle Logarithmen um 10 Einheiten zu groß angegeben; wir müssen also dort den Winkel α aufsuchen, bei dem

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9{,}903 - 10$$

angegeben ist, und finden, daß dieser Winkel (auf 5 Minuten genau) $= 38^0\,40'$ ist.

(Wollen wir eine solche Rechnung zu dem Zwecke ausführen, um auf Grund ihrer Resultate eine Zeichnung zu entwerfen, so hat eine größere Genauigkeit als die hier benutzte von 3 Dezimalstellen keinen Zweck.)

In ähnlicher Weise wie hier bei der Parabel erhalten wir nun die Tangente in einem Punkte auch bei anderen Kurven. Soll im Punkte (x_1, y_1) die Tangente konstruiert werden, so nehmen wir zunächst einen Hilfspunkt (x_2, y_2) ebenfalls auf der Kurve an und verbinden ihn mit $(x_1\, y_1)$ durch eine Sehne; die trigonometrische Tangente des Winkels, den diese Sehne mit einer Parallelen zur x-Achse einschließt, wird erhalten, indem wir die Ordinatendifferenz durch die Abszissendifferenz dividieren; setzen wir in dem gefundenen Ausdruck nachträglich die Abszissendifferenz gleich Null, so erhalten wir die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Kurventangente mit der x-Achse einschließt; wodurch die Kurventangente bestimmt ist.

Das ist also, abgesehen von der Bedeutung der Buchstaben, genau derselbe mathematische Prozeß, durch den wir in § 5 von der mittleren Geschwindigkeit eines Punktes während eines gewissen Zeitraums zu der augenblicklichen Geschwindigkeit in einem bestimmten Moment gekommen sind. Wie dort wird eine Größe, mit der zuerst dividiert worden war, nachträglich gleich Null gesetzt, also in versteckter Weise mit Null dividiert; und wie dort kann man zur Rechtfertigung eines solchen Vorgehens anführen:

I. Es kommt in denjenigen Fällen, mit welchen wir uns hier zu beschäftigen haben, etwas bestimmtes dabei heraus; wir erhalten

eine ganz bestimmte Gerade, und es steht uns frei diese Gerade Tangente zu nennen.

II. Für das praktische Zeichnen oder für Konstruktionen auf dem Felde, die doch nur begrenzte Genauigkeit zulassen, können wir die Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte durch die so definierte Tangente oder auch umgekehrt diese Tangente durch eine solche Verbindungslinie ersetzen.

III. Wir können sogar die Genauigkeit dabei beliebig weit treiben, wenn wir nur die beiden Punkte hinlänglich nahe nehmen.

§ 12. Beziehungen der beiden Arten der Einführung in die Differentialrechnung zueinander.

Vergleichen wir nunmehr die beiden Arten, wie wir zu dem fundamentalen Begriff der Differentialrechnung gelangt sind, miteinander. Wir haben in beiden Fällen, sowohl in § 5 als in § 11, zuerst einen Quotienten aus der Differenz zweier Werte der abhängigen Veränderlichen und der Differenz der entsprechenden Werte der unabhängigen gebildet und nachträglich die letztere Differenz gleich Null gesetzt. Wir können beides in eine Darstellung zusammenfassen, wenn wir uns zur Versinnlichung der in § 5 besprochenen Beziehung zwischen Zeit t und Weg s der in den letzten Paragraphen besprochenen graphischen Methode bedienen. Ein solches graphisches Bild dieser Beziehung können wir hier bekommen, wenn wir uns vorstellen, daß der fallende Körper mit einem Zeichenstift verbunden ist, und daß die vertikale Zeichnungsebene während seiner Bewegung sich in horizontaler Richtung nach der Seite der abnehmenden t mit gleichförmiger Geschwindigkeit verschiebt, sodaß immer größere und größere Werte von t mit den zugehörigen Werten von s verbunden werden. Es entsteht dann in der Zeichnungsebene eine Linie, deren Gleichung die in § 5 angegebene Beziehung zwischen Fallzeit und Fallraum:

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

ist, die also eine Parabel ist.

Bei der mechanischen Deutung der Gleichung in § 5 gab der Differenzenquotient:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

die mittlere Geschwindigkeit des Punktes während des Zeitintervalls von t_1 bis t_2; bei der geometrischen Deutung von § 11 gab derselbe

Differenzenquotient die trigonometrische Tangente des Winkels, den eine Sekante der Kurve mit der x-Axe einschließt. Bei der mechanischen Deutung gab das, was aus diesem Differenzenquotienten wird, wenn wir in seinem Ausdruck die Zeitdifferenz gleich 0 setzten, die augenblickliche Geschwindigkeit des fallenden Punktes; bei der geometrischen Deutung gab dasselbe die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Kurventangente mit der x-Achse einschließt. Wir können also sagen:

Tragen wir die Werte der Zeit t als Abszissen, die Werte irgend einer mit der Zeit veränderlichen Größe als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, so erhalten wir das Gesetz der Veränderung dieser Größe geometrisch durch eine Kurve dargestellt. *Ziehen wir an diese Kurve in irgend einem Punkte die Tangente, so gibt uns die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Kurventangente mit der Abszissenachse einschließt, ein Maß für die augenblickliche Änderungsgeschwindigkeit der zu untersuchenden Größe.*

Dabei ist nur zu beachten, in welchem Maßstab die beiden Größen aufgetragen sind. Die genannte Tangente gibt uns nur dann die Änderungsgeschwindigkeit selbst, wenn eine Zeiteinheit auf der Abszissenachse durch eine ebensolange Strecke repräsentiert wird, als eine Einheit der anderen Größe auf der Ordinatenachse. Nimmt man demgegenüber den Maßstab für die Ordinaten kleiner oder größer, so wird die Kurve flacher, bzw. steiler; das hat man zu berücksichtigen, wenn man aus einer derartigen Figur die Größe der Änderungsgeschwindigkeit ablesen will.

§ 13. Aufgaben und Zeichen der Differentialrechnung.

Im vorigen Paragraphen sind uns gewisse mit den auftretenden Größen vorzunehmende Operationen so häufig begegnet — und sie werden uns auch im Folgenden noch so häufig begegnen —, daß es sich empfiehlt, eigene Namen und Zeichen für sie einzuführen, vielmehr uns der allgemein unter den Mathematikern eingeführten Namen und Zeichen zu bedienen. Wir haben vor allem immer wieder mit dem Falle zu tun, daß zwischen zwei veränderlichen Größen eine derartige Beziehung besteht, daß die eine sich nicht ändern kann, ohne daß die andere sich gleichzeitig mit ändert. Wir sagen dann: *Die beiden veränderlichen Größen sind miteinander verknüpft.* Treiben wir abstrakte Analysis, so können wir uns eine solche Verknüpfung willkürlich geben und

sagen: wir wollen nun einmal die Konsequenzen gerade dieser Verknüpfung untersuchen. Wollen wir aber die Analysis auf eine Naturwissenschaft oder auch nur auf die Geometrie anwenden, so ist uns die Art der Verknüpfung zwischen den verschiedenen auftretenden Größen durch die Naturgesetze, bezw. durch die Sätze der Geometrie gegeben. Z. B. ist die Beziehung zwischen der Abszisse und Ordinate eines Punktes eines Kreises gegeben durch die geometrische Definition des Kreises; die Beziehung zwischen einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel in einem Dreieck, in dem die beiden anderen Seiten sich nicht ändern, durch einen geometrischen Satz, nämlich den Sinussatz der Trigonometrie; die Beziehung zwischen Fallraum und Fallzeit durch ein physikalisches Gesetz, nämlich eben das Fallgesetz; die Beziehung zwischen Reaktionszeit und umgesetzter Menge durch die Gesetze der Chemie. Solche Gesetze werden sich durch *Gleichungen* zwischen den veränderlichen Größen ausdrücken lassen; womit aber nichts darüber behauptet sein soll, ob wir zur Aufstellung einer solchen Gleichung mit den Verknüpfungssymbolen der Algebra $(+, -, \cdot, :)$ ausreichen, oder ob wir dazu noch anderer Verknüpfungszeichen bedürfen.

In den meisten Fällen erweist es sich nun als zweckmäßig, diese Gleichung nach der einen der beiden Veränderlichen — sie möge y heißen — *aufzulösen*, also y durch die andere — x — auszudrücken. Z. B. lautet die in § 10 (5) betrachtete Kreisgleichung nach y aufgelöst:

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Wir sagen dann: „jetzt ist x die *unabhängige*, y die *abhängige* Veränderliche“ oder auch wohl: „jetzt ist y *explizite* als Funktion von x dargestellt“, während es vorher durch die unaufgelöste Gleichung nur *implizite* als Funktion von x definiert war. Welche von zwei miteinander verknüpften Größen wir als unabhängige Veränderliche, welche als Funktion von ihr betrachten wollen, das steht bei rein analytischen Untersuchungen selbstverständlich in unserer Willkür; aber auch in den Anwendungen der Analysis ist die Unterscheidung in den meisten Fällen nicht durch die Natur des Problems an sich gegeben, sondern sie kommt erst durch die Art herein, wie wir es zweckmäßig finden, das Problem anzugreifen. Man sagt daher auch vielleicht besser, nicht: „jetzt *ist* x die unabhängige, y die abhängige Veränderliche“, sondern „jetzt *betrachten wir* x als unabhängig veränderlich, y als davon abhängig.“

In einem Fall ist das allerdings anders: die *Zeit* können wir nur als eine unabhängige Veränderliche, nicht als in ihrem Ablauf durch die Veränderung irgend einer anderen Größe bedingt ansehen. Immerhin hat es auch einen guten Sinn zu sagen: die Zeit, die zum Ablauf dieser oder jener Erscheinung erforderlich ist, hängt von diesen oder jenen Bedingungen ab; oder etwa zu fragen: wie lange braucht ein sich bewegender Punkt, bis er eine bestimmte Stelle seiner Bahn erreicht. In solchen Fällen erscheint dann auch die Zeit für die mathematische Untersuchung als Funktion von anderen Veränderlichen.

Wir kommen nun häufig in die Lage, in den Formeln andeuten zu müssen, daß eine Größe y als von einer anderen x abhängig betrachtet werden soll, ohne daß wir doch dabei über die *Art* der Abhängigkeit irgend etwas bestimmtes voraussetzen wollen oder können Zu diesem Zweck bedienen wir uns der Schreibweise

$$y = f(x) \tag{1}$$

(gelesen: y ist gleich f von x); die Klammer ist dabei erforderlich, um Verwechselungen mit einem Produkte f mal x vorzubeugen. Das f ist dabei nicht Zeichen für eine Größe, sondern einfach als Abkürzung der beiden Worte *„Funktion von“* anzusehen. Mit dem Nutzen dieser Bezeichnung steht es übrigens ähnlich, wie mit dem der Bezeichnung willkürlicher Größen in der Algebra überhaupt. Daß wir eine unbekannte oder unbestimmte Größe durch einen Buchstaben ersetzen, damit ist eigentlich noch gar nichts gewonnen; erst wenn eine und dieselbe Größe in der Formel oder gar in einer längeren Rechnung wiederholt vorkommt, und wir nun ein bequemes Mittel haben, um die lange Redewendung zu vermeiden: „hier kommt dieselbe Größe noch einmal vor, die vorhin schon da war“ — erst dann zeigt sich der Vorteil dieser Bezeichnungsweise. Ebenso ist es auch hier: wenn wir nur schreiben $y = f(x)$, so ist damit nichts gesagt, was sich nicht auch ebensogut in Worten sagen ließe; aber wenn wir die Gleichungen nebeneinander schreiben:

$$y = f(x), \qquad z = f(x + h),$$

so erspart uns das den langen Satz: z soll aus $x + h$ nach derselben Regel berechnet werden, nach der vorher y aus x berechnet worden war.

Haben wir mehrere Abhängigkeitsgesetze nebeneinander in einer Rechnung, so können wir sie durch untere Indizes am Buchstaben f

unterscheiden; nicht gerne durch obere Akzente, da wir diese später in einer ganz bestimmten Bedeutung brauchen wollen. Oder wir benutzen Buchstaben, die mit dem f eine gewisse Verwandtschaft haben, wie F, $\mathfrak{f}$, φ, ψ, u. s. w.; die Verwendung solcher Buchstaben als Zeichen für Größen werden wir dann womöglich vermeiden.

In unseren bisherigen Untersuchungen haben wir schon wiederholt Veranlassung gehabt, zwei Werte x_1 und x_2 oder $x_1 + h$ der unabhängigen Veränderlichen nebeneinander und die zu ihnen gehörigen Funktionswerte

$$y_1 = f(x_1), \qquad y_2 = f(x_2 + h)$$

ins Auge zu fassen und dann den Quotienten aus der Differenz der Funktionswerte, geteilt durch die Differenz der Argumentwerte:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

zu untersuchen. Es empfiehlt sich, für diese Bildung einen Namen und ein besonderes Zeichen einzuführen, bezw. den allgemein angenommenen Festsetzungen sich anzuschließen. Man nennt sie einen *Differenzenquotienten* und bezeichnet sie mit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2}$$

Das Δ ist dabei nicht als ein Faktor aufzufassen (man darf es ja nicht etwa wegheben), sondern nur als eine Abkürzung für die Worte „Differenz von“; die Zeichenverbindung Δx spielt die Rolle eines einzigen Buchstabens.

Wir bedürfen ferner einer kurzen Bezeichnung für die oft vorkommenden Worte „dasjenige, was aus einem Ausdruck A wird, wenn man in ihm nach gehöriger Reduktion einen der vorkommenden Buchstaben, nämlich h, durch Null ersetzt“; wir schreiben dafür:

$$\{A\}_{h=0}.$$

Damit könnten wir das, was aus dem Differenzenquotienten wird, wenn wir in ihm die Differenz der Argumentwerte durch Null ersetzen, bezeichen durch:

$$\left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\}_{\Delta x = 0}. \tag{3}$$

Statt dessen bedienen wir uns der einfacheren Schreibweise:

$$\frac{dy}{dx}; \tag{4}$$

dabei gilt für die d ebenso wie vorhin für die Δ, daß sie nicht als

Zeichen für besondere Größen angesehen und weggehoben werden dürfen. Zu beachten ist übrigens, daß wir damit die Zeichen dx und dy noch nicht definiert haben, sondern nur das zusammengesetzte Zeichen (4). Wir lesen daher das letztere auch lieber dy nach dx statt dy durch dx, eben weil es sich nicht um einen eigentlichen Quotienten handelt. Wir gebrauchen aber doch für den Ausdruck den allgemein eingeführten Namen *Differentialquotient,* definieren also:

Unter dem Differentialquotienten dy/dx verstehen wir das, was aus dem Differenzenquotienten wird, wenn wir in ihm die Differenz Δx der Argumentwerte gleich Null setzen.

In Zeichen:

$$\frac{dy}{dx} = \left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\}_{\Delta x = 0}. \tag{5}$$

Dabei ist vorausgesetzt, *daß* etwas bestimmtes aus dem Differenzenquotienten wird, wenn wir die angegebene Substitution in ihm vornehmen. Ob diese Voraussetzung jedesmal richtig ist, darüber werden wir uns im einzelnen Fall zu orientieren haben; eine allgemeine Erörterung der Bedingungen, unter denen sie erfüllt ist, muß speziellen Vorlesungen für Mathematiker überlassen bleiben.

Mit der hiermit eingeführten Ausdrucksweise können wir nun die Resultate unserer früheren Untersuchungen (§§ 5, 12) folgendermaßen aussprechen:

Die Geschwindigkeit eines in gerader Linie sich bewegenden Punktes ist der Differentialquotient des Weges nach der Zeit.

Ist die Gleichung einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten durch $y = f(x)$ gegeben, so bestimmt der Wert des Differentialquotienten dy/dx die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Kurventangente in diesem Punkte mit einer Parallelen zur x-Achse einschließt.

Statt „den Differentialquotienten einer Funktion y der unabhängigen Variablen x bilden", sagen wir kurz: „*y nach x differentiieren*".

Damit können wir die Aufgabe der Differentialrechnung definieren: sie lehrt, eine vorgelegte Funktion zu differentiieren. Die Elemente der Differentialrechnung, die Gegenstand dieser Vorlesung sind, beschränken sich dabei auf diejenigen Funktionen, die man herkömmlicherweise als „elementare" bezeichnet, weil schon die in den Schulen gelehrten Elemente der Algebra und der Geometrie (ein-

schließlich der Trigonometrie) zur Beschäftigung mit ihnen Veranlassung geben.

Prinzipiell ist diese Aufgabe durch die vorhergehenden Erörterungen schon erledigt; wir müssen den Differenzenquotienten aufstellen, ihn umformen und dann die Differenz der Argumentwerte gleich Null setzen. Um zu sehen, wie das auch geschehen kann, wenn die zu differentiierende Funktion weniger einfach ist als in den bisher betrachteten Fällen, soll das folgende Beispiel besprochen werden:

Sei

$$y = \sqrt{1 + x^2},$$

dann ist der Differenzenquotient:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{1 + (x+h)^2} - \sqrt{1 + x^2}}{h}$$

Hier können wir die Division nicht ohne weiteres ausführen, weil im Zähler die Wurzeln stehen. Aber in den Elementen der Algebra wird gelehrt, wie man Wurzelgrößen aus dem Nenner eines Bruches wegschaffen kann; dasselbe Verfahren kann auch angewendet werden, um sie aus dem Zähler wegzuschaffen: wir multiplizieren Zähler und Nenner mit dem sog. konjugierten Wert des Zählers:

$$\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2}$$

wodurch an dem Bruche nichts geändert wird. Im Zähler erhalten wir dann:

$$(1 + (x+h)^2) - (1 + x^2) = 2hx + h^2,$$

sodaß der Bruch wird:

$$= \frac{2hx + h^2}{h\{\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2}\}}$$

Jetzt können wir die Division mit h ohne Schwierigkeit ausführen:

$$= \frac{2x + h}{\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2}},$$

und dann $h = 0$ setzen; wir erhalten so:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Wir sind also wirklich durchgekommen, wenn auch nicht ohne einen doch wohl nicht ganz auf der Hand liegenden Kunstgriff. Doch zeigt schon dieses Beispiel genügend, daß es sich für kompliziertere Fälle wenig empfehlen würde, auf diesem Wege fortzuschreiten. Wir werden vielmehr folgendermaßen vorgehen: wir werden für

eine Anzahl einfacher und häufig vorkommender Abhängigkeitsgesetze den Differentialquotienten ein für allemal ableiten, um ihn dann später immer bereit zu haben, und wir werden nach Regeln suchen, die uns gestatten, den Differentialquotienten einer zusammengesetzten Funktion aus den Differentialquotienten derjenigen einfacheren Funktionen abzuleiten, aus denen sie zusammengesetzt ist. Dabei werden wir aber die Frage der größeren oder geringeren Einfachheit nicht nach naturwissenschaftlichen, sondern nach mathematischen Rücksichten entscheiden müssen; wir werden infolgedessen die unmittelbare Bezugnahme auf die Anwendungen für einige Zeit bei Seite schieben und uns von dem abstrakt mathematischen Gebot des Fortschreitens vom Einfacheren zum Schwierigeren leiten lassen. Dazu wird erforderlich sein, daß wir die verschiedenen uns zugänglichen Formen von Abhängigkeitsgesetzen wenigstens einigermaßen klassifizieren; und das bringt uns zu einem zweiten Abschnitt dieser Vorlesungen.

Zweiter Abschnitt.

Differentiation rationaler Funktionen.

§ 14. Rationale Funktionen.

Zur einfachsten Klasse von Abhängigkeitsgesetzen können wir diejenigen rechnen, in welchen der Wert der einen Variabeln aus demjenigen der anderen durch die vier sog. Grundrechnungsarten berechnet werden kann. Man definiert:

y heißt eine rationale Funktion von x, wenn zu jedem Wert von x der zugehörige Wert von y aus x und gewissen konstanten Größen durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen berechnet werden kann; und zwar für alle Werte von x durch dieselben.

Der Zusatz *endliche* Anzahl ist erforderlich, weil wir später auch davon reden werden, daß *unendlich* viele solche Operationen ausgeführt werden oder wenigstens ausgeführt gedacht werden sollen; Funktionen, die dann entstehen, nennen wir nicht mehr rational.

Die Konstanten, von denen in der Definition die Rede ist, können entweder bestimmte, in Ziffern geschriebene Zahlen, oder durch Buchstaben vertreten sein, denen dann aber für alle Werte von x derselbe Wert beizulegen ist.

Z. B. sind $x + 4$, $ax + b$, $(6x + 7)(3x - 4)$, x^3 (d. i. $x \cdot x \cdot x$), aber auch

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

rationale Funktionen von x.

Die rationalen Funktionen unterscheiden wir weiter in *ganze* und *gebrochene*. Eine rationale Funktion heißt nämlich ganz, wenn zu ihrer Bildung keine Divisionen erforderlich sind, in denen x als

Nenner vorkommt. Wir können die Definition folgendermaßen formulieren:

y heißt eine rationale ganze Funktion von x oder kurz ein Polynom in x, wenn zu jedem x der zugehörige Wert von y aus x und gewissen konstanten Größen durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen berechnet werden kann; und zwar für alle Werte von x durch dieselben.

Dabei ist zu beachten, daß eine Division mit einer Konstanten auch als Multiplikation mit ihrem reziproken Werte, also auch mit einer Konstanten, angesehen werden kann; es widerspricht demnach der Definition nicht, wenn wir z. B.

$$\frac{x}{8} + \frac{x^2}{\sqrt{3}}$$

als eine rationale ganze Funktion ansehen. Nur das x selbst darf nicht im Nenner vorkommen, wenn die Funktion noch als ganze bezeichnet werden soll.

Führt man alle verlangten Multiplikationen von Klammerausdrücken aus („löst man die Klammern auf"), und faßt man dann alle Glieder, die dieselbe Potenz von x zum Faktor haben, in je ein einziges Glied zusammen, so erhält man die ganze rationale Funktion in der Form:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m.$$

In dieser bedeuten die a Konstante oder aus Konstanten irgendwie zusammengesetzte Ausdrücke, also auch wieder Konstante. Der höchste Exponent m, der wirklich vorkommt, heißt der *Grad* oder die *Ordnung* der ganzen Funktion; für ganze Funktion ersten, zweiten, dritten, vierten Grades sagt man auch bezw. lineare, quadratische, kubische, biquadratische Funktion. Die Konstanten, mit denen die einzelnen Potenzen von x multipliziert sind, heißen die *Koeffizienten* dieser Potenzen, das von x freie Glied nennt man wohl das *Absolutglied* der Funktion.

Eine rationale Funktion, die nicht ganz ist, zu deren Bildung also Divisionen mit x oder mit Ausdrücken, die x enthalten, verwendet werden müssen, heißt *gebrochen*. Durch geeignete Reduktionen kann jede gebrochene rationale Funktion als Quotient zweier ganzen rationalen Funktionen dargestellt werden; man muß aber nicht glauben, daß es unter allen Umständen notwendig oder auch nur zweckmäßig sei, diese Reduktion vorzunehmen.

§ 15. Differentiation einer Potenz mit rationalem ganzen Exponenten.

Hilfssatz aus der Algebra:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}. \quad (1)$$

Von dem Fall $m = 2$:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

haben wir schon öfter Gebrauch gemacht; auch der Fall $m = 3$ darf vielleicht noch als bekannt vorausgesetzt werden:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2.$$

Daß die Formel auch noch für $m = 4$ richtig ist, wo sie lautet:

$$\frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3,$$

kann durch eine sogenannte Probe bestätigt werden; wir multiplizieren beiderseits mit dem Nenner und erhalten rechts:

$$\begin{aligned} a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 \\ - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4; \end{aligned}$$

alle Zwischenglieder heben sich weg und es bleibt nur $a^4 - b^4$ übrig; was zu beweisen war. In derselben Weise kann auch die Richtigkeit der Formel für einen beliebigen ganzzahligen Wert von m verifiziert werden.

Soll nun $y = f(x) = x^m$ differentiiert werden, so bilden wir zunächst den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^m - x^m}{(x+h) - x}.$$

Dieser ist nach dem Hilfssatz gleich:

$$(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2}x + \ldots + (x+h)x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Nach dieser Umformung steht dem nun nichts mehr im Wege, daß wir $h = 0$ setzen, um so zum Differentialquotienten zu gelangen. Tun wir das, so geht jedes Glied der rechten Seite in x^{m-1} über; und da es solcher Glieder gerade m gibt, nämlich solche mit jeder Potenz von $x + h$ von der ersten bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$, dazu noch ein von $x + h$ freies, so erhalten wir für $h = 0$ m Summanden x^{m-1} und und also als *erste Formel der Differentialrechnung* die folgende:

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1}, \quad (2)$$

mit Worten: eine Potenz mit ganzzahligem Exponenten wird differentiiert, indem man ihren Exponenten um eine Einheit erniedrigt und dafür den Exponenten selbst als Faktor zusetzt.

Geben wir dem m spezielle Werte, so erhalten wir für $m = 1$:

$$\frac{dx}{dx} = 1. \tag{3}$$

In der Tat ist für $m = 1$ der Differenzenquotient

$$\frac{(x+h)-x}{h}$$

immer gleich 1 und bleibt gleich 1, wenn wir nachher $h = 0$ setzen (er merkt das gar nicht).

Für $m = 2$ erhalten wir:

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x, \tag{4}$$

übereinstimmend mit dem in § 5 und § 11 bereits durch direkte Betrachtung dieses Falles gefundenen Resultate; für $m = 3$:

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2 \tag{5}$$

u. s. w.

Unsere Überlegungen würden nur wenig zu ändern gewesen sein, wenn wir von der Voraussetzung ausgegangen wären, y sei einer Potenz von x nicht gleich, sondern nur zu ihr proportional, also:

$$y = ax^m, \tag{6}$$

wo a eine Konstante bedeuten soll. Wir hätten dann gehabt:

$$f(x+h) = a(x+h)^m;$$

denn wir hatten ausdrücklich verabredet, a solle eine Konstante bedeuten, die für alle Werte von x denselben Wert hat, die sich also nicht ändert, wenn wir x durch $x + h$ ersetzen. Wir können diese Konstante vor die Klammer ziehen, sodaß wir erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

und daraus durch dieselbe Rechnung wie vorhin:

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}. \tag{7}$$

Z. B.:

$$y = \tfrac{3}{4}x^4, \quad \frac{dy}{dx} = 3x^3.$$

Eine Kurve, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten $y = ax^m$ ist, für positives ganzzahliges m, nennt man eine *Parabel* (im

weiteren Sinne des Wortes). Ist m gerade, so ist ihre Gestalt im wesentlichen dieselbe, wie die der Apollonischen Parabel, nur daß sie zuerst langsam, dann steiler aufsteigt, und zwar beides um so mehr, je größer m ist; ist m ungerade, so ist das Verhalten für positive x dasselbe, aber für negative x verläuft die Kurve nicht im zweiten, sondern im vierten Quadranten.

§ 16. Differentiation einer Konstanten.

In speziellen Fällen kann es vorkommen, daß eine Größe y, von der man ursprünglich angenommen hatte, sie sei von einer anderen x abhängig, sich nachträglich als von dieser unabhängig herausstellt, daß sie sich als konstant ergibt. Wir drücken das dann aus durch eine Gleichung:

$$y = a.$$

(Wir hatten ursprünglich „Konstante“ und „Variable“ als Gegensätze betrachtet: jetzt kommen wir zu der Auffassung, daß eine Konstante eigentlich nur ein sehr spezieller Fall einer Variablen ist). Wie haben wir es in einem solchen Falle mit der Differentiation zu halten?

Um das zu sehen, gehen wir vielleicht am besten auf die vorbereitenden Betrachtungen der §§ 5 und 11 zurück. Was heißt: ein sich bewegender Punkt hat einen konstanten Ort? Doch nichts anderes als: er bewegt sich überhaupt nicht. Dann ist seine Geschwindigkeit natürlich Null. Oder: Was stellt $y = a$ für eine Linie dar? Darauf ist die Antwort: eine solche, deren sämtliche Punkte gleichweit von der Abszissenachse abstehen; also eine Parallele zur Abszissenachse, und zwar im Abstande a von ihr. Eine gerade Linie ist überall ihre eigene Tangente: der Winkelraum, von dem in § 12 die Rede war, reduziert sich hier auf die Gerade selbst, die Tangente, die diesen Winkelraum in bestimmter Weise in zwei Teile teilte, muß also auch mit der Geraden selbst zusammenfallen. Die Tangente ist folglich hier überall zur Achse parallel, sie bildet einen Winkel Null mit ihr. Die trigonometrische Tangente eines Winkels Null ist selbst gleich Null. Also auch hier kommen wir zu dem Resultat: der *Differentialquotient einer Konstanten ist gleich Null.*

Wollen wir dasselbe Resultat analytisch erhalten, so müssen wir sagen: hier ist $f(x) = a$, $f(x+h)$ auch $= a$, also der Differenzenquotient:

$$\frac{a-a}{h} = 0$$

und er bleibt Null, wenn wir nachträglich $h = 0$ setzen (das hat auf ihn gar keinen Einfluß); also ist auch der Differentialquotient gleich Null; was zu beweisen war.

Wir können dieses Resultat übrigens auch mit dem im vorigen Paragraphen abgeleiteten in eine Formel zusammenfassen. Es stellt sich nämlich schon in der Algebra als zweckmäßig heraus, unter dem Zeichen x^0, das nach der ursprünglichen Definition der Potenz durch ein Produkt von gleichen Faktoren überhaupt keine Bedeutung hat, den Wert 1 zu verstehen, was auch x sein mag. Schließen wir uns dieser Verabredung an, und wenden wir dann die Regel von § 15 auch auf diesen Fall an, so liefert sie uns:

$$\frac{dx^0}{dx} = 0,$$

also wirklich das richtige Resultat. Wir brauchen uns demnach für diesen Fall keine neue Formel zu merken, sondern können sagen:

Die Gleichung (2) *von § 15, die zuerst nur für den Fall eines positiven ganzzahligen Exponenten abgeleitet war, gilt auch noch, wenn der Exponent gleich Null ist.*

§ 17. Differentiation einer Summe oder einer Differenz.

Seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ irgend zwei Funktionen, deren Differentialquotienten wir schon kennen, und sei:

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

dann können wir den Differentialquotienten von $f(x)$ folgendermaßen aus den Differentialquotienten von $\varphi(x)$ und von $\psi(x)$ ableiten: Wir bilden zunächst den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi(x+h) + \psi(x+h) - \varphi(x) - \psi(x)}{h}.$$

Dafür können wir schreiben:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}.$$

Setzen wir jetzt $h = 0$, so erhalten wir nach Voraussetzung aus jedem dieser beiden Summanden ein bestimmtes Resultat; nämlich

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}, \text{ bzw. } \frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Also erhalten wir auch etwas bestimmtes, wenn wir in der ganzen Summe $h = 0$ setzen; wir können sagen:

Hat von zwei Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jede einen bestimmten Diffe-

rentialquotienten, so hat auch ihre Summe einen bestimmten Differentialquotienten; und zwar ist er gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden:

$$\frac{d(\varphi(x)+\psi(x))}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{d\psi(x)}{dx}.$$

Dasselbe meint man, wenn man kürzer sagt: eine Summe darf gliedweise differentiiert werden.

Führen wir für $\varphi(x)$, $\psi(x)$ besondere Zeichen u, v ein, so können wir auch schreiben:

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}. \tag{1}$$

Ganz in derselben Weise kann bewiesen werden, daß:

$$\frac{d(u-v)}{dx}=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx} \tag{2}$$

ist; und durch wiederholte Anwendung dieser beiden Sätze gelangt man zu dem Resultat, daß überhaupt ein Aggregat aus beliebig vielen durch + und — verbundenen Gliedern gliedweise differentiiert werden darf.

Damit sind wir imstande, jede *rationale ganze Funktion* von x zu differentiieren; denn wir können jede solche aus Gliedern der Form ax^m zusammensetzen; und solche Glieder haben wir in § 15 zu differentiieren gelernt.

Beispiel:

$$y=8x^3+12x^2+6x+1,$$

$$\frac{dy}{dx}=8\cdot 3x^2+12\cdot 2x+6+0=24x^2+24x+6=6(4x^2+4x+1)$$

§ 18. Differentiation eines Produkts.

Seien wieder $\varphi(x)$, $\psi(x)$ zwei Funktionen, deren Differentialquotienten wir schon kennen; und sei jetzt:

$$f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x).$$

Dann ist:

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(x+h)\,\psi(x+h)-\varphi(x)\,\psi(x).$$

Wenn wir hier $\varphi(x+h)\,\psi(x)$ subtrahieren und wieder addieren, wird daran nichts geändert; wir können also schreiben:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\varphi(x+h)\,\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}+\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,\psi(x).$$

Setzen wir hier $h = 0$, so erhalten wir:

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx} + \psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

oder

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \tag{1}$$

in Worten: *Ein Produkt wird differentiiert, indem man jeden Faktor mit dem Differentialquotienten des andern multipliziert und die Resultate addiert.*

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes gelangt man zu dem allgemeineren:

Ein Produkt von beliebig vielen Faktoren wird differentiiert, indem man jeden Faktor differentiiert, den Differentialquotienten mit dem Produkt aller anderen Faktoren multipliziert und die Resultate addiert.

Z. B. ist für drei Faktoren:

$$\frac{d(uvw)}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx} \text{ oder } = uvw\left\{\frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \ldots\right\};$$

allgemein:

$$\frac{d(u_1 u_2 \ldots u_n)}{dx} = u_1 u_2 \ldots u_n\left\{\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx}\right\}.$$

Sind die Faktoren alle einander gleich, so kommt:

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \tag{2}$$

— ein spezieller Fall einer später abzuleitenden allgemeinen Formel.

Mit Hilfe dieses letzteren Satzes können wir das Beispiel vom Schlusse von § 17 noch einmal behandeln:

$$y = (2x+1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cdot(2x+1)^2\cdot 2 = 6(2x+1)^2$$

übereinstimmend mit dem damals auf anderem Wege erhaltenen Resultat.

Als Beispiel für die abgeleitete Formel möge etwa noch

$$y = (x^3-1)(x^3+1) = x^6 - 1$$

behandelt werden. Nehmen wir die ausgerechnete Form, so erhalten wir direkt

$$\frac{dy}{dx} = 6x^5;$$

nehmen wir die unausgerechnete, so finden wir zunächst

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2\cdot(x^3+1) + 3x^2(x^3-1),$$

und wenn wir hier die Klammern auflösen und zusammenziehen, wieder dasselbe Resultat.

§ 19. Differentiation eines Quotienten.

Sei wieder

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x),$$

aber jetzt:

$$y = \frac{u}{v} \text{ oder } f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Dann ist:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right\}$$

oder wenn wir auf gleichen Nenner bringen:

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{\varphi(x+h)\psi(x) - \varphi(x)\psi(x+h)}{\psi(x)\psi(x+h)}.$$

Wir bedienen uns eines ähnlichen Kunstgriffes wie im vorigen Paragraphen, indem wir im Zähler $\varphi(x)\ \psi(x)$ addieren und subtrahieren; wir erhalten dann:

$$\frac{1}{\psi(x)\psi(x+h)}\left\{\psi(x)\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi(x)\frac{\psi(x+h) - \psi(x)}{h}\right\}.$$

Jetzt können wir $h = 0$ setzen; das gibt

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\psi^2(x)}\left\{\psi(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} - \varphi(x)\frac{d\psi(x)}{dx}\right\}$$

oder:

$$\frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{1}{v^2}\left\{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right\} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx}, \tag{1}$$

mit Worten: der Differentialquotient eines Bruches ist gleich: Nenner mal Differentialquotient des Zählers weniger Zähler mal Differentialquotient des Nenners, das Ganze geteilt durch das Quadrat des Nenners. Manchmal ist übrigens die zweite Form bequemer. Das Vorzeichen merkt man sich am besten daran, daß für $v = 1$ die Identität

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx}$$

herauskommen muß. Für $u = 1$ wird erhalten

$$\frac{d\frac{1}{v}}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}; \tag{2}$$

speziell:

$$\frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2}. \tag{3}$$

§ 20. Lineare gebrochene Funktionen.

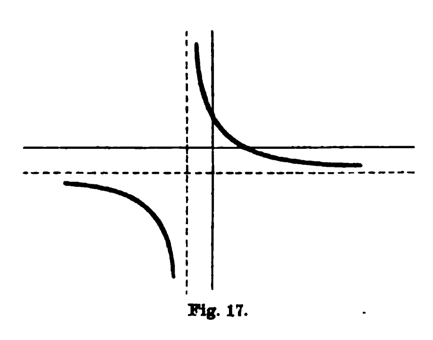
Von den gebrochenen Funktionen sind die einfachsten diejenigen, deren Zähler und Nenner lineare Funktionen (ganze Funktionen ersten Grades) sind, die also die Form haben:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Man nennt sie wohl *lineare gebrochene Funktionen.* Wir wollen uns zunächst eine solche Funktion für bestimmte Zahlenwerte der Koeffizienten geometrisch durch eine Kurve veranschaulichen, etwa:

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}.$$

Wenn wir eine Kurve nach ihrer Gleichung zeichnen wollen, werden wir zunächst zur vorläufigen Orientierung für eine Anzahl Werte von x die zugehörigen Werte von y berechnen und die zugehörigen Punkte in das Koordinatensystem eintragen. Die Abstände dieser x-Werte voneinander werden wir dabei etwa in derselben Größenordnung wählen, wie die Koeffizienten der Gleichung, zunächst aber keinesfalls zu klein, da wir erst nach der vorläufigen Orientierung darüber ein Urteil haben können, in welchen Gegenden der x-Achse wir etwa eine größere Anzahl von Punkten bestimmen müssen. Wir berechnen also vielleicht zunächst die folgenden Werte:


Fig. 17.

$$\begin{array}{llll} x = 0 & 2 & 4 & 6 \\ y = 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{3}{5} & -\frac{5}{7} \end{array}$$

und tragen sie in die Figur ein. Auch negative Werte von x müssen wir berücksichtigen; wir finden:

$$\begin{array}{lll} x = -2 & -4 & -6 \\ y = -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{5}. \end{array}$$

Man sieht, daß die bisher berechneten Punkte noch nicht hinreichen, um die Kurve dazwischen legen zu können; wir erhalten aber noch näheren Aufschluß über den Verlauf der Kurve, wenn wir vor allem

einmal den Differentialquotienten von y nach x berechnen. Durch Anwendung der Regel des vorigen Paragraphen finden wir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}\{(1+x)(-1) - (1-x)\cdot 1\} = \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

Wir sehen sogleich: dieser Ausdruck ist für alle Werte von x negativ, die Kurve muß also, wenn sie in der Richtung der wachsenden x durchlaufen wird, fortwährend fallen. Damit können wir ihren Verlauf zwischen den Punkten $x = -6$ und $x = -2$, sowie zwischen den Punkten $x = 2$ und $x = 6$ schon so ziemlich angeben, wenigstens wenn es uns nur auf eine erste Skizze ankommt, und wir haben nicht nötig, in diesen Gegenden der Achse weitere Punkte zu berechnen; aber wie kommt sie, wenn sie fortwährend fallen soll, von dem Punkt $x = -2$, $y = -3$ hinauf zu dem Punkte $x = 0$, $y = 1$? Dazu muß sie notwendig irgendwo zerreißen; wir werden also dazu geführt, uns die Frage vorzulegen: entspricht denn wirklich jedem gegebenen x auch ein bestimmter Wert y? Können wir die Vorschrift, die uns zur Berechnung des y aus dem x gegeben ist, denn auch wirklich auf jedes x anwenden? Darauf ist zu sagen: wir können die Regeln der vier Grundrechnungsarten auf beliebige Zahlen anwenden; wir können zwei beliebige Zahlen zueinander addieren, voneinander subtrahieren, miteinander multiplizieren oder durcheinander dividieren, (da wir ja annehmen, daß negative und gebrochene Zahlen bereits eingeführt sind) — mit einer einzigen Ausnahme: wir können nicht mit Null dividieren. Wir müssen also, wenn unsere Rechnungsvorschrift eine Division verlangt, jedesmal zusehen, ob dadurch nicht unter Umständen, d. h. für einzelne Werte von x, eine Division mit Null verlangt wird. Im vorliegenden Falle müssen wir fragen, ob etwa der Nenner unseres Bruches für einen Wert von x Null wird, d. h. wir müssen die Gleichung

$$x + 1 = 0$$

nach x auflösen. Die Lösung ist $x = -1$. Für diesen Wert versagt also unsere Rechnungsvorschrift. Der Zähler ist für ihn von Null verschieden, nämlich gleich $+2$; und es gibt keine Zahl y, die mit 0 multipliziert, 2 ergibt. Unsere Kurve hat also auf der Ordinate, die zu $x = -1$ gehört, überhaupt keinen Punkt.

Aber außer diesem negativen Resultat liefert uns unsere Kurvengleichung für $x = -1$ doch auch ein positives. Geben wir nämlich dem x einen Wert, der *sehr wenig* von -1 verschieden ist, so er-

hält der Nenner einen sehr kleinen Wert, der Zähler aber nicht, sondern dieser erhält einen Wert, der sehr wenig von 2 verschieden ist. Der Bruch erhält also einen sehr großen Wert; und zwar einen um so größeren, je weniger x von -1 verschieden ist. Das meinen wir, wenn wir sagen: *y wird für $x = -1$ unendlich groß,* und wenn wir schreiben:

$$f(-1) = \infty.$$

Diese Redeweise hat also keinerlei metaphysische Bedeutung, sondern ist nur ein kürzerer Ausdruck für den Satz: y bekommt sehr große Werte, wenn man dem x sehr wenig von -1 verschiedene Werte gibt; und wir können einen *beliebig* großen Wert für y erhalten, wenn wir nur dem x einen Wert beilegen, der *hinlänglich wenig* von -1 verschieden ist.

Wenn z. B. jemand einen Wert von y zu haben verlangt, der mindestens gleich 10 ist, so können wir ihm antworten: dann mußt du dafür sorgen, daß $x + 1$ absolut kleiner als $1/20$ ist; und wenn jemand damit nicht zufrieden ist, sondern sagt: ich will ein y haben, das mindestens gleich 1000 ist, so können wir auch diesem antworten: du mußt dann dafür sorgen, daß $x + 1$ absolut kleiner als $1/2000$ ist; u. s. w.

Nun bleibt aber noch eine Frage zu erörtern, nämlich: wir wissen schon, daß wir für Werte von x, die wenig von -1 verschieden sind, sehr große Werte von y erhalten; ob diese Werte aber positiv oder negativ sind, dazu müssen wir erst noch näher zusehen. Zu diesem Zweck setzen wir zuerst:

$$x = -1 + \varepsilon,$$

indem wir unter ε eine sehr kleine Größe verstehen; dann erhalten wir:

$$y = \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Hier ist der Zähler positiv, der Nenner hat dasselbe Zeichen wie ε, der ganze Bruch also auch. Nun bedeutet ein *positives* ε, daß wir einen Punkt betrachten, der *rechts* von $x = -1$ liegt; ein *negatives* führt zu einem Punkt *links* von -1. Also können wir sagen: zu Werten von x, die algebraisch wenig kleiner als -1 sind, gehören sehr große negative, zu Werten von x, die sehr wenig größer als -1 sind, sehr große positive Werte von y. Man drückt das dann auch wohl so aus: unsere Kurve geht vor $x = -1$ nach der negativen Seite ins Unendliche, springt dann nach $+\infty$ über und

kommt wieder nach unten, um die y-Achse bei $y = 1$ zu überschreiten. Man sieht, daß wir, wenn wir ihren Verlauf in dieser Gegend bestimmen wollen, zwischen $x = -2$ und $x = -1$, sowie zwischen $x = -1$ und $x = 0$ etwa noch je zwei Punkte berechnen müssen. Auch zwischen $x = 0$ und $x = 2$ werden wir noch einen oder zwei Punkte brauchen. Wenn wir aber diese Punkte berechnet:

$$\begin{array}{llllll} x = -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ y = -5 & -9 & +7 & +3 & \frac{2}{3} & 0 \end{array}$$

und in die Figur eingetragen haben, können wir die Kurve in dem Gebiet, das wir bis jetzt ins Auge gefaßt haben, schon ziemlich genau zeichnen, jedenfalls für vorläufige Orientierung genügend; da wir ja schon wissen, daß der Differentialquotient beständig negativ ist, ein Hin- und Heroszillieren, Steigen und wieder Fallen also ausgeschlossen ist.

Aber es bleibt noch die Frage: wie verhält sich die Kurve außerhalb des bis jetzt in Rechnung gezogenen Gebietes der x? Wir können doch unmöglich immer neue und neue Werte von y zu Werten von x berechnen. Wir wollen die Frage so formulieren: wie verhält sich unsere Kurve für große Werte von x? Diese Frage können wir für jede rationale Funktion durch folgendes Verfahren beantworten: wir dividieren im Zähler und im Nenner mit der höchsten vorkommenden Potenz von x, hier also mit x selbst; dadurch erhalten wir hier:

$$y = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1}.$$

Geben wir nun dem x sehr große Werte, so erhält $1/x$ sehr kleine; der Zähler wird wenig von -1 verschieden, der Nenner wenig von $+1$, der Bruch also wenig von -1; und zwar um so weniger, je größer x ist. Wir können sagen: für alle hinlänglich großen Werte von x — und zwar sowohl für positive, wie für negative — ist y beliebig wenig von -1 verschieden. Nichts anderes meinen wir, wenn wir sagen: *Für unendlich große x ist $y = -1$*, und wenn wir schreiben:

$$f(\infty) = -1.$$

Da wir nun für die äußersten Werte von x, die wir berechnet haben, Werte von y gefunden haben, die von -1 zwar nicht viel,

aber doch noch merklich abweichen, so werden wir vielleicht noch je zwei Werte links und zwei rechts berechnen, etwa:

$$\begin{array}{lllll} x = & -20 & -10 & +10 & +20 \\ y = & -\frac{21}{19} & -\frac{11}{9} & -\frac{9}{11} & -\frac{19}{21}. \end{array}$$

Damit können wir uns aber begnügen; da wir außerdem wissen, daß dy/dx stets negativ ist, so brauchen wir keine neuen Werte von y mehr zu berechnen, sondern haben über den weiteren Verlauf der Kurve nach rechts und nach links für unsere Zwecke genügend Aufschluß.

Die Kurve heißt eine *Hyperbel;* die beiden Geraden $x = -1$ und $y = -1$, denen sie sich unbegrenzt annähert, ohne sie jedoch zu erreichen, heißen ihre *Asymptoten.*

In ähnlicher Weise läßt sich nun auch überhaupt jede gebrochene lineare Funktion diskutieren. Die geometrische Darstellung jeder solchen Funktion ist eine Hyperbel; es gilt bei jeder, daß der Differentialquotient für alle Werte von x dasselbe Vorzeichen hat, indem nämlich das x auch bei beliebigen Werten von α, β, γ, δ aus dem Zähler des Differentialquotienten herausfällt, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\gamma x + \delta)^2}\left\{(\gamma x + \delta)\frac{d(\alpha x + \beta)}{dx} - (\alpha x + \beta)\frac{d(\gamma x + \delta)}{dx}\right\}$$
$$= \frac{1}{(\gamma x + \delta)^2}\{(\gamma x + \delta)\,\alpha - (\alpha x + \beta)\,\gamma\} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}.$$

§ 21. Differentiation einer Potenz mit negativem ganzzahligen Exponenten.

Das Zeichen x^{-n} hat zwar bei positivem n nach der ursprünglichen Definition einer Potenz als eines Produktes aus lauter gleichen Faktoren keine Bedeutung, indem ja doch von einem Produkt aus $(-n)$ Faktoren nicht die Rede sein kann; es erweist sich jedoch schon in den Elementen der Algebra als zweckmäßig, darunter den Wert $\frac{1}{x^n}$ zu verstehen. Es kann dann gezeigt werden — wenn auch vielleicht beim elementaren Unterricht nicht ausführlich darauf eingegangen wird — daß für die so definierte Potenz mit negativem ganzzahligen Exponenten alle algebraischen Gesetze der Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten Gültigkeit behalten. Die Frage, ob dasselbe auch für die in § 15 abgeleitete Differentiations-

regel gilt, ist nicht a priori zu beantworten; denn an und für sich ist das nicht selbstverständlich, und der Beweis, der dort für positive Exponenten gegeben war, läßt sich auf negative Exponenten nicht ohne weiteres anwenden. Aber wir können auf Grund des Satzes von § 19 durch die folgende Rechnung zeigen, daß die Formel auch für den Fall eines negativen ganzzahligen Exponenten gilt. Es ist:

$$\frac{d\frac{1}{x^n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n}}\frac{dx^n}{dx} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Dafür können wir auf Grund der definierten Bezeichnung schreiben:

$$\frac{dx^{-n}}{dx} = -nx^{-n-1} \tag{1}$$

Diese Formel geht aus der von § 15 dadurch hervor, daß man in dieser einfach $-n$ anstatt n schreibt; wir brauchen uns also für die Differentiation einer Potenz mit negativem ganzzahligen Exponenten keine neue Regel zu merken, sondern können sagen:

Die in § 15 abgeleitete Regel für die Differentiation einer Potenz gilt auch für Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten.

Auch die in § 18 abgeleitete Regel für die Differentiation einer Potenz nicht von x selbst, sondern von irgend einer anderen Funktion von x bleibt für negative Exponenten bestehen. Wir haben nämlich:

$$\frac{d\frac{1}{u^n}}{dx} = -\frac{1}{u^{2n}}\frac{du^n}{dx} = -\frac{nu^{n-1}}{u^{2n}}\frac{du}{dx} = -\frac{n}{u^{n+1}}\frac{du}{dx};$$

und dafür können wir schreiben:

$$\frac{du^{-n}}{dx} = -nu^{-n-1}\frac{du}{dx}. \tag{2}$$

Z. B. ist:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x^2)^2} = \frac{+4x}{(1-x^2)^3}.$$

Daran schließt sich eine für die Praxis des Differentiierens, zur Vermeidung überflüssiger Rechnungen, nicht unwichtige Bemerkung. Vermöge der eingeführten Bezeichnung können wir jeden Bruch u/v^n dessen Nenner eine Potenz ist, auch als ein Produkt uv^{-n} schreiben und als solches differentiieren. Differentiieren wir ihn in der ursprünglichen Form, so erhalten wir:

$$\frac{d(u/v^n)}{dx} = \frac{1}{v^{2n}}\left\{v^n\frac{du}{dx} - nuv^{n-1}\frac{dv}{dx}\right\} = \frac{1}{v^{n+1}}\left\{v\frac{du}{dx} - nu\frac{dv}{dx}\right\},$$

differentiieren wir ihn aber in der zweiten Form, so lautet die Rechnung:

$$\frac{d(u/v^n)}{dx} = -nuv^{-n-1}\frac{dv}{dx} + v^{-n}\frac{du}{dx}.$$

Man sieht: der überflüssige Faktor v^{n-1}, der bei der ersten Rechnung im Zähler und im Nenner auftrat und erst weggehoben werden mußte, tritt bei der zweiten Rechnung nicht auf: die zweite Rechnung ist deshalb mehr zu empfehlen.

Dritter Abschnitt.

Differentiation irrationaler Funktionen.

§ 22. Inverse Funktionen und ihre Differentiation.

Schon in § 13 ist hervorgehoben, daß die Unterscheidung zwischen der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y in den meisten Fällen nicht in der Natur der Aufgabe begründet, sondern nur von uns zum Zwecke bequemerer Behandlung hereingebracht ist. Gewöhnlich liegt die Sache so, daß zunächst nur überhaupt irgend ein Zusammenhang zwischen zwei Variablen gegeben ist, — wie etwa der Zusammenhang zwischen Druck p und Volumen v einer abgeschlossenen Gasmenge bei konstanter Temperatur durch:

$$pv = \text{const.},$$

— und daß wir dann eine solche Beziehung nach der einen der beiden Variablen aufgelöst, die eine durch die andere ausgedrückt haben. Wir können aber in vielen Fällen gerade so leicht die zweite durch die erste ausdrücken; im vorliegenden Beispiel können wir ebensogut sagen: der Druck, den eine eingeschlossene Gasmenge ausübt, ist ihrem Volumen umgekehrt proportional, als: um eine eingeschlossene Gasmenge auf ein bestimmtes Volumen zusammenzudrücken, ist ein diesem Volumen umgekehrt proportionaler Druck erforderlich.

Entsprechendes gilt nun allgemein. Ist eine Funktion $y = f(x)$ gegeben, so können wir in vielen Fällen durch Auflösung dieser Gleichung auch x als Funktion von y darstellen:

$$x = \varphi(y).$$

Die beiden Abhängigkeitsgesetze f und φ nennen wir dann zueinander *invers* oder das eine die *Umkehrung* des anderen.

Z. B. ist zu:

$$y = a + x; \quad ax; \quad \frac{1}{x}; \quad x^2; \quad x^3; \quad 10^x,$$

die inverse Funktion bzw.:

$$x = y - a; \quad \frac{y}{a}; \quad \frac{1}{y}; \quad \sqrt{y}; \quad \sqrt[3]{y}; \quad \log_{10} y\,.$$

Wir fragen nun: wenn wir den Differentialquotienten einer Funktion kennen, wie können wir daraus den Differentialquotienten der zu ihr inversen Funktion bestimmen? Daß dies überhaupt möglich sein muß, sehen wir am einfachsten im Anschluß an die geometrische Darstellung von § 11 ein: wir haben dort den Differentialquotienten von y nach x in Beziehung gebracht zu dem Winkel α, den die Kurventangente mit der x-Achse einschließt: dy/dx war die trigonometrische Tangente dieses Winkels. Ebenso ist aber dx/dy die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Kurventangente mit der y-Achse einschließt; wir wollen schreiben:

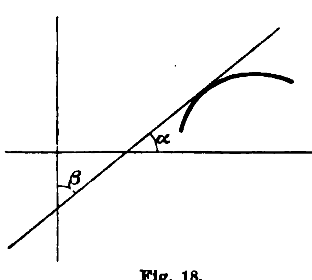


Fig. 18.

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg}\beta. \tag{1}$$

Aber die beiden Achsen sollten einen rechten Winkel miteinander einschließen, also ist

$$\alpha + \beta = R$$

und folglich

$$\operatorname{tg}\beta = \cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

d. h. es ist:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \tag{2}$$

Wir müßten uns nur noch genau überlegen, ob bei dieser Betrachtung auch das Vorzeichen in allen Fällen richtig bestimmt ist, können aber darauf verzichten, da wir die Formel doch auch analytisch ableiten wollen. Wir betrachten zu diesem Zweck zunächst die betreffenden Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}.$$

Dabei sind x_1, y_1 einerseits, x_2, y_2 andererseits „zusammengehörige" Werte; wir können also darüber beruhigt sein, daß diese Zeichen in

den beiden angeschriebenen Gleichungen wirklich dieselbe Bedeutung haben. Daher können wir folgern:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Wollen wir nun von den Differenzenquotienten zu den Differentialquotienten übergehen, so haben wir rechts $\Delta x = 0$, links dagegen $\Delta y = 0$ zu setzen; es sieht also auf den ersten Blick aus, als wäre links eine andere Substitution vorzunehmen, als rechts. Aber das ist nicht der Fall: wenn $\Delta x = 0$ wird, wird auch $\Delta y = 0$ und umgekehrt, wenigstens bei denjenigen Funktionen, mit denen wir uns hier beschäftigen; es ist also gleichgültig, ob wir die eine oder die andere Substitution vornehmen, und wir erhalten wieder die Gleichung (2), jetzt aber ohne daß wir uns noch Bedenken wegen des Vorzeichens zu machen brauchen.

Für die drei ersten der genannten Beispiele lehrt uns der Satz nichts neues, wir können aber seine Richtigkeit für diese Fälle auf Grund der früheren Formeln bestätigen:

$$y = a + x, \quad \frac{dy}{dx} = 1; \quad x = y - a, \quad \frac{dx}{dy} = 1;$$

$$y = ax, \quad \frac{dy}{dx} = a; \quad x = \frac{y}{a}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}$$

$$y = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad x = \frac{1}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = -x^2 = -\frac{1}{y^2}.$$

Dagegen erhalten wir für uns neue Formeln, wenn wir ihn auf das vierte oder fünfte Beispiel anwenden; doch wollen wir diese Sache gleich allgemein untersuchen.

§ 23. Differentiation einer Wurzel und einer Potenz mit beliebigem Exponenten.

Ist:

$$y = \sqrt[n]{x}, \tag{1}$$

so ist umgekehrt:

$$x = y^n,$$

also:

$$\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$$

und folglich nach dem Satz von § 22:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}}. \tag{2}$$

Wir erhalten also hier den Differentialquotienten von y nach x ausgedrückt zunächst nicht durch x, wie in den bisher behandelten Problemen, sondern durch y. Wir könnten zwar eigentlich damit zufrieden sein; denn wenn wir den Wert des Differentialquotienten einer Funktion y von x für einen bestimmten Wert von x brauchen, so brauchen wir in den meisten Fällen doch auch den zugehörigen Wert von y, müssen diesen also ohnedies berechnen und können ihn dann gleich auch zur Berechnung des Differentialquotienten benutzen. Wenn wir z. B. die Tangente in einem Punkte einer Kurve konstruieren wollen, müssen wir doch erst diesen Punkt selbst haben; es kann uns also schließlich gleichgültig sein, ob wir die Richtung der Tangente aus der Abszisse oder aus der Ordinate des Punktes berechnen. Und wenn wir die Geschwindigkeit wissen wollen, die ein bewegter Punkt zu irgend einer Zeit hat, werden wir doch dabei auch wissen wollen, wo der Punkt sich zu dieser Zeit befindet; wir werden also keinen wesentlichen Wert darauf legen, ob wir die Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblick oder die Geschwindigkeit an einer gegebenen Stelle der Bahn durch unsere Formeln ausgedrückt haben. Aber wenn es möglich ist, den Differentialquotienten durch die unabhängige Veränderliche auszudrücken, werden wir einen solchen Ausdruck doch gerne auch ableiten. Im vorliegenden Fall ist das in der Tat möglich; wir brauchen nur in (2) y durch seinen Wert aus (1) zu ersetzen; dann erhalten wir:

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Z. B. ist:

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{d\sqrt[3]{x}}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ist ferner:

$$y = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \tag{3}$$

gegeben, so können wir die Formel (2) von § 18 herbeiziehen und

$$y = u^m, \qquad u = \sqrt[n]{x}$$

setzen; wir erhalten dann:

$$\frac{dy}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},$$

also wenn wir einsetzen und für u wieder seinen Wert $\sqrt[n]{x}$ schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\sqrt[n]{x^{m-1}}}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}. \tag{4}$$

Bei dieser Ableitung ist zu beachten, daß die benutzte Formel, wie wir in § 18 gesehen haben, auch für negative Werte von m Gültigkeit hat; also gilt das gleiche von der hier abgeleiteten.

In der Algebra wird verabredet, daß unter dem Zeichen $x^{\frac{m}{n}}$, das nach der ursprünglichen Definition der Potenz keine Bedeutung hat, $\sqrt[n]{x^m}$ verstanden werden soll Machen wir von dieser Bezeichnung Gebrauch, so können wir die Formel (4) auch schreiben:

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

In dieser Gestalt wird die Formel auch aus der von § 15 dadurch erhalten, daß man in dieser überall m/n statt m schreibt; daraus geht hervor, daß diese letztere Formel auch für gebrochene (positive wie negative) Werte des Exponenten Gültigkeit behält. Wir brauchen uns also für die Differentiation einer Wurzel keine neue Formel zu merken, sondern können einfach sagen: *die Regel von § 15 für die Differentiation einer Potenz gilt auch für den Fall, daß der Exponent eine gebrochene Zahl ist.*

Und zwar dürfen wir hinzufügen:

Auch für den Fall, daß der Exponent eine negative gebrochene Zahl ist.

Denn wir können eine negative gebrochene Zahl immer ansehen als den Quotienten aus einem negativen Zähler und einem positiven Nenner; und unsere Ableitung gilt auch für den Fall eines negativen Zählers.

Z. B. ist:

$$\frac{d\sqrt{x^3}}{dx} = \frac{dx^{3/2}}{dx} = \tfrac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x},$$

$$\frac{d\sqrt[3]{x^2}}{dx} = \frac{dx^{2/3}}{dx} = \tfrac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Von den in diesem Paragraphen besprochenen Funktionen brauchen wir diejenigen, für welche $m = 1$ ist, nicht noch besonders geometrisch zu diskutieren, da sie ja die inversen zu den schon in § 19 diskutierten Funktionen $y = x^n$ geben. Man erhält die Kurve, deren Gleichung $y = \sqrt[n]{x}$ ist, aus derjenigen, deren Gleichung $y = x^n$ ist, dadurch, daß man das Koordinatensystem um 90^0 dreht und

dann die positive Richtung der einen Koordinatenachse ändert. Von den übrigen soll hier nur die Kurve

$$y = \sqrt[3]{x^2},$$

die sog. semikubische oder Neilsche Parabel, näher besprochen werden. Bei dieser gehören zu entgegengesetzt gleichen Werten von x gleiche Werte von y, sie ist also symmetrisch gegen die y-Achse. Ihr Differentialquotient wird um so größer, je kleiner x ist; man

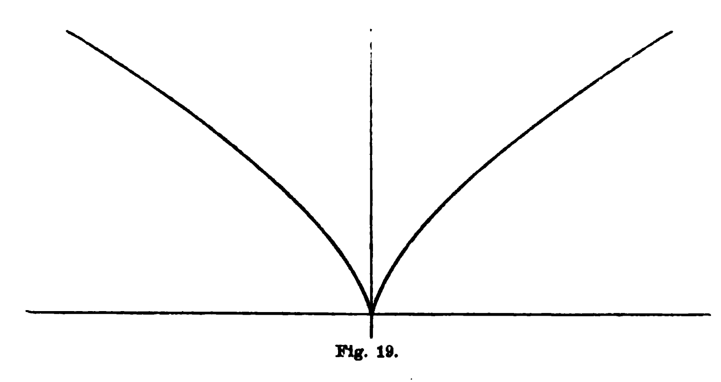


Fig. 19.

sagt: er ist bei $x = 0$ unendlich groß. Die Kurventangente bildet also dort einen rechten Winkel mit der x-Achse, oder was dasselbe ist, sie fällt mit der y-Achse zusammen; und da das für jeden der beiden Kurvenzweige gilt, so folgt, daß sich diese beiden Kurvenzweige im Ursprung mit einer Spitze zusammenschließen.

§ 24. Differentiation einer Funktion von einer Funktion.

Wir hatten schon in § 18 den Fall behandelt, daß y gleich einer Potenz nicht von x selbst, sondern von einer Größe u war, die selbst erst wieder irgendwie von x abhing. Wir wollen jetzt die damals erhaltene Formel dahin verallgemeinern, daß wir annehmen, y sei nicht gerade eine Potenz von u, sondern irgendwie von x abhängig; daß wir also den Fall betrachten: y ist Funktion einer Größe u, die selbst wieder Funktion von x ist, oder wie wir kurz sagen: „*y ist gleich einer Funktion von einer Funktion von x.*“

Wir können in diesem Fall den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ersetzen durch:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x};$$

denn Δu ist eine wirkliche Größe, mit der wir ohne weiteres im Zähler und Nenner dividieren dürfen, ohne daß dadurch der Wert des Bruches geändert wird. Wenn wir nun Δx zu Null machen, müssen wir, wenn Δu eine derjenigen Funktionen ist, mit denen wir uns hier beschäftigen, gleichzeitig auch Δu zu Null machen; gehören y als Funktion von u und u als Funktion von x zu denjenigen Funktionen, die wir differentiieren können, so gehen dabei die beiden Differenzenquotienten in bestimmte Werte, nämlich in die zugehörigen Differentialquotienten über, und wir erhalten also die *Formel für die Differentiation einer Funktion von einer Funktion* in der Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Auch diese Formel enthält wie die entsprechenden früheren eigentlich zwei Behauptungen in sich: nämlich erstens die Behauptung, daß unter den eingeführten Voraussetzungen ein bestimmter Wert herauskommt, und zweitens die Angabe dieses Wertes.

Nehmen wir speziell $y = u^n$, so wird $\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$ und wir erhalten wieder die spezielle Formel von § 18.

Beispiel: Soll etwa

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

differentiiert werden, so können wir setzen:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - x^2,$$

wir erhalten dann:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{du}{dx} = -2x,$$

und also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Man kann aus diesem Resultat den geometrischen Satz wieder ableiten, daß die Tangente an einen Kreis auf dem Radius des Berührungspunktes rechtwinklig steht.

Durch Wiederholung des Verfahrens kann man auch noch kompliziertere Funktionen differentiieren. Ist z. B. vorgelegt:

$$y = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}},$$

so setze man:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - v, \quad v = \sqrt{w}, \quad w = 1 - x^2;$$

man erhält dann der Reihe nach:

$$\frac{dw}{dx} = -2x,$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{w}},$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{w}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{u}\sqrt{w}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}.$$

Auf diese Weise kann man überhaupt jede Funktion behandeln, die aus x und konstanten Größen durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Wurzelausziehungen entsteht. Man pflegte solche Funktionen sonst als *algebraische Funktionen* zu bezeichnen, bedient sich aber dieses Terminus jetzt in einem weiteren Sinne.

Vierter Abschnitt.

Elemente der Integralrechnung.

§ 25. Aufgaben der Integralrechnung.

Wie schon in § 3 erörtert, behandelt die Integralrechnung Aufgaben, bei welchen aus einer Elementarwirkung auf eine Gesamtwirkung geschlossen werden soll, z. B. aus dem Gesetz der von einem einzelnen Massenpunkt ausgeübten Anziehung auf die Anziehung eines ausgedehnten Körpers, aus der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes auf den von ihm in einer gewissen Zeit zurückgelegten Weg, aus dem Gesetz der Reaktionsgeschwindigkeit auf die Menge des in bestimmter Zeit gebildeten Reaktionsprodukts. Diese Probleme können wir mit den inzwischen eingeführten Bezeichnungen jetzt folgendermaßen formulieren: *Es soll eine Funktion gefunden werden, deren Differentialquotient einen gegebenen Ausdruck hat.*

Der einfachste Fall dieser Aufgabe ist der, daß der Ausdruck nur die unabhängige Variable x, nicht auch noch die abhängige Variable y enthält; mit ihm allein wollen wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen.

Wie man derartige Probleme angreifen kann, auch ohne von Differentialrechnung etwas zu wissen, soll zunächst an einem einfachen Beispiel gezeigt werden: Ein Punkt bewege sich von der Stelle $s = 0$ aus mit einer Geschwindigkeit, die in jedem Augenblick der bis dahin seit Beginn der Bewegung verflossenen Zeit proportional, also gleich

$$gt$$

ist, unter g eine Konstante verstanden, unter der wir uns die „Beschleunigung der Schwere“ ($g = 980$) denken können, aber nicht müssen; wo wird er sich zu irgend einer Zeit befinden?

Das können wir so angreifen: während der ersten Sekunde war seine Geschwindigkeit mindestens $= 0$ und höchstens $= g$, der von ihm während dieser Sekunde zurückgelegte Weg also

mindestens $= 0$, höchstens $= g$ cm

Ebenso war der von ihm während der zweiten Sekunde zurückgelegte Weg:

mindestens $= g$, höchstens $= 2g$,

während der dritten Sekunde:

mindestens $= 2g$, höchstens $= 3g$

u. s. w.; allgemein während der t-ten Sekunde

mindestens $= (t-1)g$, höchstens $= tg$.

Der während der t ersten Sekunden zurückgelegte Weg beträgt also

$$\text{mindestens } (0 + 1 + 2 + \ldots + (t-1))g,$$
$$\text{höchstens } (1 + 2 + 3 + \ldots + t)g \text{ cm}.$$

Wir kommen also auf die arithmetische Aufgabe: was ist die Summe der ersten natürlichen Zahlen, von 1 bis t, also: $1 + 2 + 3 + \ldots + t$?

Diese Frage können wir dadurch beantworten, daß wir das erste Glied der Summe mit dem letzten, das zweite mit dem vorletzten u. s. w. zusammennehmen; wir erhalten nämlich dann:

$$1 + t = t + 1,$$
$$2 + t - 1 = t + 1,$$
$$3 + t - 2 = t + 1 \ldots$$

Ist t gerade, so erhalten wir genau $\frac{t}{2}$ solche Paare, also für die ganze Summe den Wert

$$\frac{t}{2}(t+1) = \frac{t(t+1)}{2},$$

ist aber t ungerade, so erhalten wir $\frac{(t-1)}{2}$ solche Paare und dazu noch ein isoliertes mittelstes Element $\frac{(t+1)}{2}$. Die Summe ist also in diesem Falle gleich

$$\frac{t-1}{2}(t+1) + \frac{t+1}{2} = \frac{t+1}{2}\{t - 1 + 1\}$$

und das ist auch gleich $\frac{t(t+1)}{2}$. Wir sehen:

Die Summe der t ersten natürlichen Zahlen ist in jedem Falle gleich

$$\frac{t(t+1)}{2},$$

mag t gerade oder ungerade sein.

Wenden wir das auf unser Problem an, so sehen wir: Der von unserem Punkte in den t ersten Sekunden zurückgelegte Weg beträgt

$$\text{mindestens } \frac{(t-1)tg}{2} = \frac{gt^2}{2} - \frac{gt}{2},$$

$$\text{höchstens } \frac{t(t+1)g}{2} = \frac{gt^2}{2} + \frac{gt}{2}.$$

Daraus können wir nun schon schließen: wenn wir behaupten, dieser Weg betrage gerade

$$\tfrac{1}{2}gt^2, \tag{1}$$

so begehen wir dabei vielleicht einen Fehler, der aber höchstens $= \frac{gt}{2}$ cm, also höchstens gleich dem t^{ten} Teil des angegebenen Wertes ist.

Genügt uns die damit erreichte Genauigkeit, so sind wir fertig; sind wir mit ihr nicht zufrieden, so können wir größere Genauigkeit erreichen, wenn wir nicht so summarisch verfahren, sondern der Bewegung unseres Punktes noch mehr ins Detail, sozusagen mikroskopisch, nachgehen. Verfolgen wir sie etwa von n^{tel} Sekunde zu n^{tel} Sekunde, so sehen wir: in der ersten n^{tel} Sekunde betrug die Geschwindigkeit mindestens 0, höchstens $\frac{g}{n}$ cm in der Sekunde; der während dieser ersten n^{tel} Sekunde zurückgelegte Weg also:

$$\text{mindestens } 0, \qquad \text{höchstens } \frac{g}{n^2} \text{ cm}.$$

Ebenso beträgt der in dem zweiten Sekunden-n^{tel} zurückgelegte Weg

$$\text{mindestens } \frac{g}{n^2}, \qquad \text{höchstens } \frac{2g}{n^2} \text{ cm}$$

u. s. w.; schließlich der im $(nt)^{\text{ten}}$ Sekunden-n^{tel} zurückgelegte Weg:

$$\text{mindestens } \frac{(nt-1)g}{n^2} \qquad \text{höchstens } \frac{nt\cdot g}{n^2} \text{ cm}.$$

Der gesamte während der nt ersten Sekunden-n^{tel}, d. h. während der t ersten Sekunden zurückgelegte Weg beträgt also mindestens

$$\frac{g}{n^2}\cdot\frac{(nt-1)\cdot nt}{2} = \frac{gt^2}{2} - \frac{gt}{2n},$$

höchstens

$$\frac{g}{n^2}\cdot\frac{nt\cdot(nt+1)}{2} = \frac{gt^2}{2} + \frac{gt}{2n}.$$

Wir sehen: der während der t ersten Sekunden zurückgelegte Weg ist von dem Wert (1) sicher um nicht mehr als

$$\frac{gt}{2n}$$

verschieden; und da wir dabei die Zahl n so groß nehmen können, wie wir wollen, so folgt: er kann von diesem Wert überhaupt nicht verschieden sein. Denn sobald jemand kommt und behauptet, er sei von (1) um eine bestimmte Größe ε verschieden, können wir n so groß nehmen, daß

$$\frac{gt}{2n} < \varepsilon$$

wird, und die Einrede widerlegen.

In dieser Weise hat Galilei schon vor Ausbildung der Differentialrechnung die Fallgesetze behandelt; und wesentlich in derselben Weise hat schon im Altertum Archimedes den Flächeninhalt eines Parabelsegments bestimmt.

Man sieht, was vor allem erforderlich wäre, wenn wir auf diesem Wege weitergehen und auch schwierigere Aufgaben behandeln wollten: wir müßten, wenn irgend eine Funktion $f(t)$ gegeben ist, zunächst eine sogenannte *Summenformel* ableiten, d. h. einen übersichtlichen Ausdruck für den Wert

$$F(t) = f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{t}{n}\right);$$

und wir müßten dann untersuchen, was aus

$$\frac{F(t)}{n}$$

wird, wenn wir n über alle Grenzen wachsen lassen. Aber schon der erste Teil dieser Aufgabe führt auf ziemliche Schwierigkeiten; für $f(t) = t^2, t^3, t^4$ geht die Sache noch einigermaßen einfach, aber schon für höhere Potenzen von t mit ganzzahligen Exponenten bekommt man für die Summe keine einfachen Ausdrücke mehr, und bei anderen Funktionen als solchen Potenzen wird es noch schwieriger.

Aber wir brauchen ja gar nicht auf diesem Wege vorzugehen. Es handelt sich doch nur um die Aufgabe, eine Funktion zu finden, deren Differentialquotient nach t gleich gt ist. Eine solche Funktion kennen wir aber schon aus der Differentialrechnung: der Differentialquotient von $\frac{1}{2}gt^2$ ist gleich gt. Dürfen wir nun diesen Satz umkehren und schließen: wenn der Differentialquotient einer Funktion gleich gt ist, so ist diese Funktion gleich $\frac{1}{2}gt^2$?

§ 26. Unbestimmtheit dieser Aufgaben. Die Integrationskonstante.

Offenbar dürfen wir nicht so schließen. Denn $\frac{1}{2}gt^2$ ist nicht die einzige Funktion, deren Differentialquotient gleich gt ist; auch $\frac{1}{2}gt^2 + 1$ oder $\frac{1}{2}gt^2 - 3$ oder überhaupt

$$\frac{1}{2}gt^2 + C$$

wo C irgend eine konstante, von t unabhängige Größe bedeutet — alle diese Funktionen haben gt zum Differentialquotienten. Denn die additive Konstante fällt ja beim Differentiieren weg. Dasselbe gilt allgemein: *Die Aufgaben der Integralrechnung*, wie sie in § 25 formuliert wurden, *sind wesentlich unbestimmt*, wir können aus dem Differentialquotienten allein die ursprüngliche (primitive) Funktion nicht vollständig bestimmen. Das ist auch mechanisch und geometrisch einleuchtend: wissen wir nur, mit welcher Geschwindigkeit ein Punkt sich während einer gewissen Zeit bewegt, so können wir daraus allein unmöglich schließen, wo er sich zu gegebener Zeit befindet, wenn wir nicht auch wissen, wo er sich zu Anfang der Zeitzählung oder überhaupt in irgend einem bestimmten Momente befunden hat; und wenn wir von einer Kurve die Tangentenrichtung zu jedem x kennen, so können wir daraus wohl ihre Gestalt, aber nicht vollständig ihre Lage entnehmen; wir können sie ja parallel mit der y-Achse um ein beliebiges Stück verschieben, ohne daß die zu den einzelnen Werten von x gehörigen Neigungen der Tangenten geändert werden. Wir können also sagen:

Das Problem der Integration einer vorgelegten Funktion ist kein vollständig bestimmtes, die Funktion, deren Differentialquotient eine gegebene andere Funktion ist, ist jedenfalls nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Wir nennen diese Konstante die *Integrationskonstante* und unterlassen nicht, sie jedesmal beizufügen.

Zur Bezeichnung des Integrals einer gegebenen Funktion f, d. h. einer Funktion F, von der f der Differentialquotient ist, bedient man sich aus später zu erörternder Veranlassung des Zeichens:

$$\int f(x)\,dx.$$

Man definiert also „das unbestimmte Integral von f" durch den Satz:

Wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

ist, so ist

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Wo ein solches Integrationsproblem in den Anwendungen der Analysis auftritt, kommen immer noch „Nebenbedingungen" hinzu, aus denen der dieser Integrationskonstanten im einzelnen Falle beizulegende Wert zu bestimmen ist; bei mechanischen Problemen gewöhnlich „Anfangsbedingungen" d. h. Bedingungen, die den Zustand des Systems zu einer bestimmten Anfangszeit ausdrücken. Bei geometrischen Problemen mag etwa ein Punkt gegeben sein, durch den eine Kurve von gegebenem Gesetz der Tangentenrichtung gelegt werden soll, oder sonst irgend ein von der Kurve abhängiger Zahlwert.

Diese Unbestimmtheit der Integrationsprobleme ist eine für unsere gesamte Naturauffassung fundamentale Tatsache. Alle Naturgesetze sind Differentialgesetze; sie sagen nur aus: wenn der Zustand in diesem Augenblicke der und der ist, so wird er im nächsten Augenblick der und der sein. Wollen wir aus ihnen den Zustand zu irgend einer Zeit bestimmen, so müssen wir einen Anfangszustand kennen. Über diesen geben uns die Naturgesetze keinen Aufschluß und können uns keinen Aufschluß geben. Wir mögen diesen Anfangszustand soweit zurückrücken wie wir wollen, immer werden wir ihn aus Naturgesetzen nur erklären können, wenn wir ihn als durch einen noch weiter zurückliegenden bedingt ansehen wollen.

Um aber wieder zu dem zunächst vorliegenden mathematischen Problem zurückzukehren: sind mit der bereits konstatierten Unbestimmtheit des Integrationsproblems denn auch alle Möglichkeiten erschöpft? Wenn wir eine Funktion haben, deren Differentialquotient einen gegebenen Ausdruck hat, können wir aus dieser dann alle anderen durch Addition von willkürlichen Konstanten ableiten, oder gibt es außer diesen Lösungen noch weitere? Anders ausgedrückt: ist die Differenz zweier Funktionen, die beide denselben Differentialquotienten haben, notwendig eine Konstante?

Wir können diese Frage auf eine einfachere zurückführen. Wenn nämlich zwei Funktionen F_1 und F_2 beide denselben Differentialquotienten haben, so ist der Differentialquotient ihrer Differenz

$$\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$$

nach dem Satze (2) von § 17 gleich Null. Die Frage reduziert sich

also auf die folgende: *Ist eine Funktion, deren Differentialquotient überall gleich Null ist, notwendig eine Konstante?*

Mechanisch wie geometrisch scheint es, als ob diese Frage ohne weiteres unbedingt zu bejahen sei. Denn wenn ein Punkt keine Geschwindigkeit hat, so bleibt er eben in Ruhe; und eine Linie, deren Richtung überall zur Abszissenachse parallel ist, ist notwendig eine Parallele zu dieser. Aber bei schärferem Zusehen bemerkt man, daß in diesen Schlüssen doch noch eine unausgesprochene Voraussetzung verborgen ist: die nämlich, daß keine sprungweisen oder, wie man zu sagen pflegt, *unstetigen* Änderungen vorkommen. Wollten wir solche Änderungen zulassen, so müßten wir etwa eine Funktion, die zwischen $x = a$ und $x = b$ gleich einer Konstanten A und zwischen $x = b$ und $x = c$ gleich einer anderen Konstanten B wäre, auch als eine Funktion bezeichnen, deren Differentialquotient überall gleich Null wäre. Nun könnte man ja an die Möglichkeit denken, daß man auch mit Funktionen mit sehr vielen sehr kleinen unstetigen Änderungen zu tun bekäme; solche würden sich unseren Schlüssen zunächst entziehen. Wir wollen aber auf die Diskussion derartiger Fälle hier nicht eingehen; wir wollen auch auf den Versuch verzichten, von der Stetigkeit, von der hier die Rede ist, eine arithmetische Definition zu geben, und wollen sie als eine nicht weiter zu definierende geometrische Eigenschaft ansehen; demgemäß wollen wir ohne ausführlichen Beweis den Satz aussprechen:

Eine stetige Funktion, deren Differentialquotient überall gleich Null ist, ist notwendig eine Konstante.

Für alle für die Anwendungen der Analysis wichtigen Fälle genügen zu seiner Begründung die angestellten Überlegungen; wegen weiterer Diskussionen muß auf die besonderen Vorlesungen und Lehrbücher für Mathematiker verwiesen werden.

Ist dieser Satz zugegeben, so ergibt sich aus ihm durch die vorhin angestellte Überlegung der weitere:

Eine stetige Funktion, deren Differentialquotient gegeben ist, ist dadurch bis auf eine additive Konstante bestimmt,

oder:

Zwei stetige Funktionen, deren Differentialquotienten überall übereinstimmen, können sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

Die Frage, ob denn zu jeder gegebenen Funktion eine andere existiert, von der die erstere der Differentialquotient ist, ist durch diese Überlegungen nicht beantwortet.

§ 27. Reduktionsformeln der Integralrechnung.

Auf Grund der Überlegungen von § 26 können wir zu jeder Formel der Differentialrechnung eine Formel der Integralrechnung ableiten, z. B. ergibt sich aus dem Satz von § 17 über die gliedweise Differentiation einer Summe oder einer Differenz, daß *eine Summe oder Differenz auch gliedweise integriert werden kann;* mit anderen Worten, es ist:

$$\int (\varphi(x) + \psi(x))\, dx = \int \varphi(x)\, dx + \int \psi(x)\, dx$$
$$\text{oder} \int (u + v)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx. \tag{1}$$

Der Beweis wird erhalten, indem man die beiden Seiten differentiiert; der Differentialquotient der linken Seite ist $u + v$; denn nach Definition ist $\int (u + v)\, dx$ eine derjenigen Funktionen, deren Differentialquotient $u + v$ ist. Auf der rechten Seite steht eine Summe; deren Differentialquotient ist die Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden, also gleich $u + v$. Die beiden Seiten von (1) haben also übereinstimmende Differentialquotienten und können sich folglich nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Eine solche ist im Integralzeichen immer mit einbegriffen gedacht und braucht daher, solange auf beiden Seiten der Gleichung noch Integralzeichen stehen, nicht besonders hingeschrieben zu werden.

Durch einen ganz analogen Schluß ergibt sich:

$$\int au\, dx = a \int u\, dx, \tag{2}$$

d. h. *eine multiplikative Konstante kann vor das Integralzeichen gezogen werden.*

Aus der Regel für die Differentiation eines Produktes ergibt sich durch Integration:

$$\int \frac{d(uv)}{dx}\, dx = \int u \frac{dv}{dx} + \int v \frac{du}{dx} dx$$

oder:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx. \tag{3}$$

Damit haben wir freilich nicht die Integration eines Produktes auf die seiner Faktoren zurückgeführt, sondern wir haben nur eine Regel, um eine solche Integration durch eine andere — oder vielmehr

zwei andere, — zu ersetzen, die uns vielleicht bekannt oder wenigstens leichter zugänglich sind als die vorgelegte, vielleicht aber auch nicht. Man nennt das Verfahren mit einem schlecht gewählten, aber allgemein gebräuchlichen Namen das der *Integration durch Teile* oder der *teilweisen* (partiellen) *Integration.*

Die Regel für die Differentiation einer Funktion von einer Funktion liefert für die Integralrechnung eine Formel, die man die Formel der *Integration durch Substitution* nennt und die folgendermaßen lautet:

$$\int f(z)\, dz = \int f(\varphi(x)) \frac{dz}{dx} dx. \tag{4}$$

Zum Beweis bilden wir die Differentialquotienten beider Seiten nach x: der der rechten Seite ist:

$$f(\varphi(x)) \frac{dz}{dx}.$$

Von der linken Seite ist der Differentialquotient nach z:

$$f(z),$$

also der nach x:

$$f(z) \frac{dz}{dx},$$

übereinstimmend mit dem der rechten Seite. Die beiden Seiten können sich also nur durch eine additive Konstante unterscheiden, die wie vorhin nicht angeschrieben zu werden braucht, weil sie in den Integralzeichen mit inbegriffen ist. Auch diese Regel führt nur die Integration einer Funktion auf die einer anderen zurück, von der dahingestellt bleibt, ob sie einfacher ist als die vorgelegte.

§ 28. Integration rationaler ganzer Funktionen.

Aus der Gleichung von § 15 ergibt sich durch Integration:

$$\int n x^{n-1}\, dx = x^n + C$$

oder wenn wir den Faktor n vor das Integralzeichen bringen und dann auf die andere Seite hinüberschaffen:

$$\int x^{n-1}\, dx = \frac{x^n}{n} + C.$$

(Ob wir hier rechts C/n oder einfach C schreiben, ist ganz gleichgültig: der $n$te Teil einer ganz willkürlichen Größe ist selbst eine

ganz willkürliche Größe). Schreiben wir $n + 1$ für n, so erhalten wir die gewöhnlich benutzte Gestalt der Formel:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

In dieser Gestalt gilt sie, wie die Differentiationsformel, aus der sie abgeleitet ist, für alle positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Werte von n, mit einer einzigen Ausnahme: wir haben bei der Ableitung mit n dividiert und dann $n + 1$ für n geschrieben, unsere Ableitung versagt also, wenn $n + 1 = 0$, d. h. $n = -1$ ist. In der Tat würde die Formel, wenn wir sie für $n = -1$ anwenden wollten, für alle x einen unendlich großen Wert liefern; wir werden später sehen, was in diesem Falle an ihre Stelle zu treten hat.

Mit Hilfe dieser Formel und der Formel (1) von § 28 können wir nun jede rationale ganze Funktion integrieren; z. B. ist:

$$\int (x^3 - 3x^2 + 1)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x + C.$$

§ 29. Das bestimmte Integral und seine geometrische Darstellung durch einen Flächeninhalt.

Ist $F(x)$ irgend eine derjenigen Funktionen, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist, so verstehen wir unter dem *„bestimmten Integral“*:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

die Differenz

$$F(x_2) - F(x_1).$$

Dabei ist es ganz gleichgültig, welche unter den verschiedenen Funktionen, deren Differentialquotient $f(x)$ ist, wir für $F(x)$ nehmen; denn die additive Konstante, durch die sie sich voneinander unterscheiden, fällt aus der Differenz heraus. Z. B ist:

$$\int_1^2 (4x^3 + 9x^2 + 5)\, dx = [x^4 + 3x^3 + 5x + C]_1^2 =$$

$$(16 + 24 + 10 + C) - (1 + 3 + 5 + C) = 50 - 9 = 41.$$

Kommen wie hier in der zu integrierenden Funktion keine weiteren Buchstaben, sondern nur Zahlenkoeffizienten vor, so ist das bestimmte Integral gleich einem ganz bestimmten Zahlwert. Es sei nun

$$y = f(x)$$

als Gleichung einer Kurve in rechtwinkligen Koordinaten aufgefaßt; wir wollen zunächst den Fall behandeln, daß y für alle in Betracht kommenden Werte von x positiv ist. Dann können wir nach dem Flächeninhalt fragen, der begrenzt ist von der x-Achse, von einer bestimmten Anfangsordinate, die zu $x = a$ gehört, von der Kurve, und von der Endordinate, die zu einem beliebigen x gehört. Kurve, Achse und Anfangsordinate wollen wir festhalten; dann können wir den Flächeninhalt ansehen als eine von der letzten Abszisse abhängige Größe, also als eine Funktion dieses x, die vorläufig mit $\Phi(x)$ bezeichnet werden möge. Lassen wir das x um eine kleine Größe h oder Δx wachsen, so wird auch der Flächeninhalt um eine kleine Größe wachsen müssen, die wir in Analogie zu früheren Bezeichnungen $\Delta\Phi(x)$ nennen können. Sehen wir den Satz als geometrisch evident an, daß von zwei Flächen, von denen eine ganz in der anderen enthalten ist, die umschließende größer ist als die umschlossene, und bezeichnen wir mit M die größte und mit m die kleinste Ordinate, die in dem Intervall von x bis $x + \Delta x$ vorkommt, so sehen wir, daß $\Delta\Phi(x)$ größer ist als ein Rechteck von der Breite Δx und der Höhe m, und kleiner als ein Rechteck von der Breite Δx und der Höhe M, also:

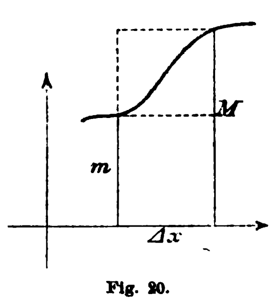


Fig. 20.

$$m\,\Delta x < \Delta\Phi(x) < M\,\Delta x \quad \text{oder} \quad m < \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} < M.$$

Lassen wir nun Δx immer kleiner werden, so nähern sich m und M immer mehr dem Werte, den y für das Argument x annimmt; wir erhalten also:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = f(x),$$

d. h. $\Phi(x)$ muß eine derjenigen Funktionen sein, von welchen $f(x)$ Differentialquotient ist. Ist $F(x)$ irgend eine dieser Funktionen, so muß also:

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

sein, wo C eine Konstante bedeutet. Diese Konstante können wir bestimmen, wenn wir die bis jetzt noch nicht berücksichtigte Nebenbedingung mit heranziehen, daß der zu berechnende Flächeninhalt nach links durch die Ordinate $x = a$ begrenzt sein soll. Daraus

geht nämlich hervor, daß er sich auf Null reduziert, wenn wir $x = a$ werden lassen; es muß also:

$$0 = F(a) + C$$

sein. Aus dieser Gleichung ergibt sich der Wert der Konstanten; setzen wir ihn ein, so erhalten wir für den Flächeninhalt den Ausdruck:

$$\Phi(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

§ 30. Näherungsweise Berechnung eines Flächeninhaltes.

Wenn es uns gelingt, die Funktion $F(x)$ zu bestimmen, so gibt uns die letzte Formel des vorigen Paragraphen die Möglichkeit, den dort betrachteten Flächeninhalt zu berechnen. Andererseits können wir von dort aus auch in solchen Fällen, in welchen sich die Funktion $F(x)$ nicht mit elementaren Mitteln ausdrücken läßt, oder in welchen es uns nicht gelingt, einen solchen Ausdruck zu finden, oder in welchen der gefundene Ausdruck unverhältnismäßig unhandlich ist, zu einer Vorschrift gelangen, vermöge deren wir ein bestimmtes Integral wenigstens näherungsweise numerisch berechnen können. Betrachten wir etwa der Einfachheit halber zunächst den Fall, daß die Funktion $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ wächst, und schalten wir zwischen a und b der Reihe nach eine beliebige Anzahl von Zwischenpunkten $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ein, so folgt aus dem vorhin schon benutzten geometrischen Axiom einerseits:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx < (x_1 - a)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \cdots \\ + (x_{n-1} - x_{n-2})f(x_{n-1}) + (b - x_{n-1})f(b), \end{aligned} \tag{1}$$

andererseits:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx > (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots \\ + (x_{n-1} - x_{n-2})f(x_{n-2}) + (b - x_{n-1})f(x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Wenn wir die eingeschalteten Punkte hinlänglich nahe aneinander annehmen, werden die beiden Werte, zwischen denen sonach das Integral eingeschlossen ist, wenig voneinander verschieden sein; wir werden also dann jeden von ihnen als einen Näherungswert für das Integral ansehen dürfen.

Die einfachste — obgleich nicht in allen Fällen die zweckmäßigste — Annahme ist, daß man die eingeschalteten Punkte in gleichen Abständen voneinander und von den Ecken annimmt, sodaß jede der Differenzen zweier aufeinanderfolgender x gleich dem $n$ten Teil der ganzen Differenz $b - a$ wird. Die beiden Formeln lauten dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx < \frac{b-a}{n}\{y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1}\}, \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx > \frac{b-a}{n}\{y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + y_n\}. \tag{4}$$

In vielen Fällen erhält man einen sehr brauchbaren Näherungswert, wenn man statt dieser beiden Werte, von denen der eine zu groß, der andere zu klein ist, das arithmetische Mittel aus beiden nimmt, also:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\{\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-2} + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\} \tag{5}$$

setzt. (Für solche nur näherungsweise richtige Gleichheit soll hier und im folgenden das Zeichen $\sim$ gebraucht werden.) Auch die hier stehende Summe hat übrigens eine einfache geometrische Bedeutung: sie stellt die Summe der Trapeze vor, die entstehen, wenn man die Endpunkte der in ihr benutzten Ordinaten geradlinig verbindet. Je nachdem die Kurve nach oben oder nach unten vorgewölbt (konvex) ist, ist diese Summe kleiner oder größer als der gesuchte Flächeninhalt.

Nimmt $f(x)$ mit wachsendem x ab, so gelten ganz entsprechende Schlüsse, man braucht nur die Worte „kleiner" und „größer" überall zu vertauschen, außer im letzten Satz.

Nimmt $f(x)$ etwa von $x = a$ bis zu einem der eingeschalteten Teilpunkte x_k zu, dann wieder ab, so kann man den gesuchten Flächeninhalt in zwei Teile zerlegen und auf jeden von ihnen die Formel (5) anwenden; man erhält so:

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\{\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \cdots + y_{k-1} + \tfrac{1}{2}y_k\}$$
$$+ \frac{b-a}{n}\{\tfrac{1}{2}y_k + y_{k+1} + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\};$$

das ist aber nichts anderes als:

$$\frac{b-a}{n}\left\{\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \cdots + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n\right\},$$

mit Worten: die Formel (5) gilt auch in diesem Falle; und dann ebenso in dem Falle, daß $f(x)$ öfter vom Wachsen ins Abnehmen oder umgekehrt übergeht. Fällt der Wechsel zwischen zwei eingeschaltete Punkte, so wird die Anwendung der „*Trapezformel*" (5) auf das betreffende Teilintervall eventuell einen verhältnismäßig größeren Fehler geben, als für ein Intervall, in dem die Funktion nur wächst oder nur abnimmt; aber wenn die Teilintervalle nur hinlänglich klein gewählt sind, so wird auch das im Schlußresultat relativ nicht viel ausmachen.

Sehen wir von dieser Möglichkeit ab, beschränken wir uns also auf Fälle, in welchen die Funktion in jedem Teilintervall entweder nur wächst oder nur abnimmt, so können wir leicht angeben, wie groß wir n zu nehmen haben, wenn wir sicher sein wollen, daß der Fehler eine gewisse vorgegebene Grenze nicht überschreitet. Die Differenz der beiden „Rechtecksformeln" (3) und (4), von denen in diesem Falle die eine sicher einen zu kleinen, die andere sicher einen zu großen Wert gibt, ist:

$$\frac{b-a}{n}(y_n - y_0),$$

der Fehler der „Trapezformel" (5) ist also im ungünstigsten Falle höchstens halb so groß. In den meisten Fällen, wenn die Kurve nicht sehr stark gewölbt ist, ist er übrigens beträchtlich kleiner, wie ein Blick auf eine Figur zeigt.

Soll etwa der Wert des Integrals:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x},$$

das wir mit den uns bis jetzt zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht ausdrücken konnten, numerisch auf zwei Dezimalstellen genau berechnet werden, so haben wir:

$$a = 1,\quad b = 2,\quad f(b) = 0{,}5,\quad f(a) = 1,$$

der Fehler wird also, wenn wir $n+1$ Ordinaten benutzen, höchstens gleich

$$\frac{1}{n}(1 - 0{,}5) = \frac{1}{2n}.$$

Wollen wir sicher sein, daß das kleiner als 0,005 ausfällt, so müssen wir $n = 100$ nehmen. Tatsächlich reicht man in diesem Falle mit einem weit kleineren Werte von n aus, etwa mit $n = 10$. Wir erhalten dann nämlich:

$$
\begin{array}{lrr}
y_0 = & & 1 \\
y_1 = & 0{,}909 & \\
y_2 = & 0{,}833 & \\
y_3 = & 0{,}769 & \\
y_4 = & 0{,}714 & \\
y_5 = & 0{,}667 & \\
y_6 = & 0{,}625 & \\
y_7 = & 0{,}588 & \\
y_8 = & 0{,}555 & \\
y_9 = & 0{,}526 & \\
y_{10} = & & 0{,}5 \\
\hline
 & 6{,}186 & 1{,}5 \\
 & +\,0{,}75 & \\
\hline
 & 6{,}936 &
\end{array}
$$

Wir erhalten also durch diese Rechnung als Wert des Integrals 0,6936, während eine nach später zu besprechenden bequemeren Methoden durchgeführte genauere Rechnung 0,69315 ergibt. Der Fehler unserer Rechnung ist also in der Tat kleiner als eine Einheit der dritten Stelle nach dem Dezimalkomma.

Fünfter Abschnitt.

Der Logarithmus und die Exponentialfunktion. Integration rationaler gebrochener Funktionen.

§ 31. Definition und Eigenschaften des natürlichen Logarithmus.

Ebenso wie in dem zuletzt betrachteten Beispiel für $x = 2$, können wir für jeden Wert von x den Wert des bestimmten Integrals

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} \tag{1}$$

berechnen. Wir sind also berechtigt, diesen Wert als eine Funktion von x anzusehen; da sie uns häufig begegnen wird und sich nicht durch die schon eingeführten Zeichen ausdrücken läßt (wie wir allerdings hier nicht beweisen können), so empfiehlt es sich, einen eigenen Namen und ein eigenes Zeichen für sie einzuführen. Wenn wir jetzt schon den Namen *„Natürlicher Logarithmus"* und das Zeichen log (auch wohl log nat, ln oder bloß l) benutzen, so greifen wir damit insofern vor, als es sich erst weiterhin herausstellen wird, in welcher Beziehung diese Funktion zu der in den Elementen der Algebra definierten Funktion „Logarithmus von x für eine bestimmte Basis a" steht.

Haben wir irgend eine Funktion definiert, so werden wir nach Eigenschaften von ihr fragen. Vom natürlichen Logarithmus können wir ohne weiteres folgende Eigenschaften aus seiner Definition durch das bestimmte Integral (1) ablesen:

1. Er ist für jeden positiven Wert von x definiert.

(Wie es für negative Werte von x steht, ist nicht ohne weiteres zu erkennen. Denn zwischen den positiven und den negativen Werten von x liegt der Wert $x = 0$, für den die zu integrierende Funktion unendlich groß wird; die Definition durch den Flächeninhalt hört

hier auf. Wir wollen auf die Frage, was unter dem Logarithmus einer negativen Zahl zu verstehen sei, in dieser Vorlesung nicht eingehen.)

2. Er ist positiv für $x > 1$, gleich 0 für $x = 1$, negativ für $x < 1$.

3. Er nimmt mit wachsendem x fortwährend zu, denn sein Differentialquotient ist für alle in Betracht kommenden, nämlich für alle positiven, Werte von x positiv. — Ob er dabei über alle Grenzen wächst oder nur bis zu einer gewissen Grenze, ist nicht ohne weiteres zu erkennen.

Von besonderem Nutzen wird es für das Eindringen in die Natur eines noch unbekannten Abhängigkeitsgesetzes immer sein, wenn es gelingt, eine *Funktionalgleichung* zu finden, der ein solches Gesetz genügt, d. h. eine Relation zwischen den Werten der Funktion für verschiedene Argumente, die immer dann erfüllt ist, wenn zwischen diesen Argumenten selbst eine oder mehrere bestimmte Relationen bestehen. Eine solche Relation können wir hier folgendermaßen ableiten. Wir führen in das Integral vermöge der Substitution

$$\eta = \xi z, \tag{2}$$

in der z eine konstante, aber beliebige positive Größe bedeuten soll, eine neue Integrationsvariable η ein; dann benutzen wir die Formel (4) von § 27. Dabei müssen wir nur darauf achten, daß wir auch die neuen Grenzen entsprechend wählen: dem $\xi = 1$ entspricht $\eta = z$, dem $\xi = x$ entspricht $\eta = xz$. Wir erhalten also:

$$\int_1^x \frac{d\xi}{\xi} = \int_z^{xz} \frac{z}{\eta} \cdot \frac{d\eta}{z} = \int_1^{xz} \frac{d\eta}{\eta} - \int_1^z \frac{d\eta}{\eta},$$

mit anderen Worten, es ist:

$$\log xz = \log x + \log z \tag{3}$$

und zwar für beliebige positive Werte von x und z. Man nennt diese Formel das *Additionstheorem der Funktion Logarithmus,* insofern sie erlaubt, die Summe zweier Logarithmen durch einen einzigen auszudrücken.

Die Formel ist zunächst abgeleitet unter der Voraussetzung, daß unter z eine von x unabhängige Größe verstanden ist. Da sie aber für jeden positiven Wert dieses z gilt, so können wir es in ihr auch als veränderlich ansehen und nachträglich mit dem x zusammenfallen lassen. Tun wir das, so erhalten wir:

$$\log x^2 = 2 \log x. \tag{4}$$

Setzen wir ferner in der Formel (3) $z = x^2$, so erhalten wir zunächst:

$$\log x^3 = \log x + \log x^2$$

und wenn wir dann die Formel (4) anwenden:

$$\log x^3 = 3 \log x. \qquad (5)$$

So fortfahrend kommen wir zur Vermutung, es werde allgemein für jede positive ganze Zahl n die Formel gelten:

$$\log x^n = n \log x; \qquad (6)$$

und wir können die Richtigkeit dieser Vermutung durch den sogenannten Schluß von n auf $n + 1$ leicht bestätigen.

Setzen wir in der so erhaltenen Formel $\sqrt[n]{x}$ an Stelle von x, so erhalten wir:

$$\log x = n \log \sqrt[n]{x}$$

oder

$$\log x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log x; \qquad (7)$$

und wenn wir die Formeln (6) und (7) verbinden, für jede rationale gebrochene Zahl $\frac{m}{n}$:

$$\log x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log x. \qquad (8)$$

Das können wir aber so aussprechen: *Die Formel* (6) *gilt nicht nur für jede ganze, sondern auch für jede gebrochene positive rationale Zahl n.*

Daß sie dann auch für irrationale Zahlen n gilt, werden wir daraus schließen können, daß wir jede irrationale Zahl näherungsweise durch eine rationale Zahl ersetzen können, und daß einer sehr kleinen Änderung von x auch nur eine sehr kleine Änderung von $\log x$ entspricht; doch muß die genauere Durchführung dieser Schlußweise den besonderen Vorlesungen und Lehrbüchern für Mathematiker vorbehalten bleiben.

Daß die Formel (6) endlich auch für negative Exponenten n gilt, sieht man am einfachsten ein, wenn man in der Ausgangsformel (3) $z = \frac{1}{x}$ setzt; dann erhält man nämlich:

$$\log x + \log \frac{1}{x} = \log 1$$

und das ist gleich 0, wie aus der Definition des Logarithmus durch das bestimmte Integral (1) hervorgeht. Also ist:

$$\log (x^{-1}) = -\log x$$

und folglich allgemein:

$$\log(x^{-n}) = -n \log x \tag{9}$$

d. h. die *Gleichung* (6) *gilt auch für negative Exponenten.*

Mit Hilfe dieser Formeln können wir den natürlichen Logarithmus für *jede* positive Zahl x berechnen, sobald wir ihn für *eine einzige* positive Zahl z kennen. Wir brauchen dazu nur einen Exponenten n so zu bestimmen, daß

$$z^n = x \tag{10}$$

wird. Das hat aber keine Schwierigkeit, wenn wir eine Tafel der sogenannten BRIGGischen Logarithmen (mit der Basis 10), d. h. eine gewöhnliche Logarithmentafel zur Hand haben; denn wenn die Gleichung (10) bestehen soll, so muß nach elementaren Formeln des Rechnens mit gewöhnlichen Logarithmen:

$$n \log \operatorname{brigg} z = \log \operatorname{brigg} x$$

oder

$$n = \frac{\log \operatorname{brigg} x}{\log \operatorname{brigg} z} \tag{11}$$

sein. Damit liefert die Formel (6)

$$\log x = \frac{\log \operatorname{brigg} x}{\log \operatorname{brigg} z} \log z = \frac{\log z}{\log \operatorname{brigg} z} \log \operatorname{brigg} x, \tag{12}$$

d. h. wir erhalten den natürlichen Logarithmus irgend einer positiven Zahl x, wenn wir ihren Tafellogarithmus mit einem ein für allemal bestimmten, von x unabhängigen Faktor multiplizieren. Wir können diesen Faktor angeben, sobald wir zu irgend einer Zahl den natürlichen Logarithmus auf einem andern Wege berechnet haben; benutzen wir die in § 30 durchgeführte Berechnung des natürlichen Logarithmus von 2, so erhalten wir für jenen Faktor — er wird gewöhnlich mit $\frac{1}{M}$ bezeichnet — den Wert:

$$\frac{1}{M} = \frac{0{,}694}{0{,}301} = 2{,}303;$$

$$M = 0{,}434. \tag{13}$$

Wollen wir ihn genauer haben, so müßten wir erst den natürlichen Logarithmus von 2 genauer berechnen, indem wir eine größere Anzahl Zwischenpunkte einschalten.

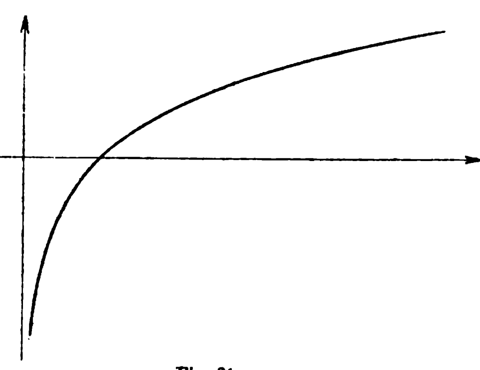


Fig. 21.

Wir fassen die Resultate dieser ganzen Untersuchung noch einmal ausdrücklich in Formeln zusammen:

$$\log \text{nat}\, x = \int_1^x \frac{dx}{x} = 2{,}303 \ldots \log \text{brigg}\, x;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log \text{nat}\, x + C,$$

$$\frac{d \log \text{nat}\, x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln und der allgemeinen Sätze der §§ 17, 18, 19, 24 kann nun jede Funktion differentiiert werden, die sich mit Hilfe der algebraischen Operationszeichen und der Zeichen des Logarithmus und der Exponentialfunktion zusammensetzen läßt. Sei z. B. vorgelegt:

$$y = \log (x + \sqrt{x^2 \pm 1}),$$

so setzen wir:

$$y = \log z, \quad z = x + u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = x^2 \pm 1$$

und finden der Reihe nach:

$$\frac{dv}{dx} = 2x,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm 1}},$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{du}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}{\sqrt{x^2 \pm 1}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}.$$

Umgekehrt ist also:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log (x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C,$$

— ein Resultat, an das wir uns in § 75 zu erinnern haben werden.

§ 32. Definition und Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen legen die Frage nahe, ob wir nicht den natürlichen Logarithmus einer Zahl x auch als ihren Logarithmus, in dem in der Algebra definierten Sinne dieses Wortes, für irgend eine Basis ansehen können. Diese Frage wird

zu bejahen sein, wenn es eine Zahl e gibt, deren natürlicher Logarithmus gleich 1 ist; denn dann haben wir:

$$\log e^x = x \log e = x, \tag{1}$$

also ist der natürliche Logarithmus irgend einer Zahl $y = e^x$ wirklich gleich demjenigen Exponenten x, zu dem wir e erheben müssen, um y zu erhalten, mit anderen Worten: der Logarithmus von y für die Basis e, wie er in der Algebra definiert wird.

Alles kommt darauf an, ob wir eine solche Zahl e finden können. Nun haben wir bereits gesehen, daß log 2 kleiner als 1 ist; auf dem damals eingeschlagenen Wege würden wir uns auch ohne Schwierigkeit davon überzeugen können, daß log 3 größer als 1 ist. Außerdem haben wir in § 31 gesehen, daß der natürliche Logarithmus mit wachsendem Logarithmandus beständig wächst, und auch bereits erwähnt, daß wir eine beliebig kleine Änderung des Logarithmus erreichen können, wenn wir den Logarithmandus hinlänglich wenig ändern. Daraus können wir nun schließen, daß zwischen 2 und 3 ein und nur ein Wert von y liegen muß, für den $\log y$ gerade gleich 1 ist. Wir können diesen Wert mit beliebiger Genauigkeit durch ein Verfahren berechnen, dessen Anwendung im vorliegenden Falle zwar ziemlich umständlich sein würde, das aber in andern ähnlichen Fällen auch für die praktische Rechnung zu empfehlen ist. Wenn wir nämlich wie hier zwei Zahlen haben, zwischen denen die gesuchte Wurzel der Gleichung $f(x) = a$ liegen muß, und wenn die Funktion $f(x)$ so beschaffen ist, daß wir zu jedem vorgelegten Wert von x ihren Wert ohne zu große Mühe berechnen können, so können wir der gesuchten Wurzel durch ein geregeltes Probieren, das wir an dem vorliegenden Beispiel zeigen wollen, immer näher kommen. Wir prüfen zunächst etwa die Mitte zwischen 2 und 3, also die Zahl 2,5; wir finden, daß auch diese noch zu klein ist, indem log 2,5 kleiner als 1 ausfällt. Die gesuchte Zahl e muß also zwischen 2,5 und 3 liegen. Wir prüfen daher etwa 2,7; es stellt sich heraus, daß auch diese Zahl noch zu klein ist, indem nämlich auch log 2,7 noch kleiner als 1 ausfällt. Prüfen wir aber jetzt 2,8, so sehen wir, daß log 2,8 größer als 1 ausfällt; also liegt e zwischen 2,7 und 2,8. Damit ist e schon auf zwei geltende Stellen bestimmt. Sind wir mit dieser Genauigkeit nicht zufrieden, so können wir in derselben Weise weiter gehen und etwa zunächst 2,75 prüfen; wir finden dann, daß auch diese Zahl noch zu groß ist, und daß dasselbe auch für 2,73

und 2,72 gilt. Dagegen erweist sich 2,71 wieder als zu klein. Damit haben wir e auf drei geltende Stellen bestimmt. So können wir fortfahren und eine Dezimalstelle der gesuchten Zahl nach der andern berechnen. Dabei müssen wir freilich, je weiter wir fortschreiten, je näher wir der Lösung also kommen, die Logarithmen um so genauer berechnen; denn sonst könnte es uns begegnen, daß wir für einen Logarithmus, der z. B. nur wenig größer als 1 wäre, infolge der Ungenauigkeit der Rechnung einen Wert bekämen, der kleiner als 1 wäre. Die Rechnung gibt übrigens selbst darüber Aufschluß, wie große Genauigkeit bei jedem Schritte erforderlich ist.

Im vorliegenden Falle würde die Anwendung dieses Verfahrens, wie gesagt, ziemlich mühsam sein, weil die Ausrechnung jedes Logarithmus, der geprüft werden soll, eine Wiederholung der Rechnung von § 30 erfordern würde. Wir könnten ja die Mühe dadurch verringern, daß wir, wenn etwa log 2 schon berechnet ist, z. B. log 2,5 nach der Formel:

$$\log 2{,}5 = \log 2 + \log 1{,}25$$

berechneten; aber dann müßten wir diejenigen Logarithmen, von denen wir ausgehen, schon mit so großer Genauigkeit berechnet haben, wie sie tatsächlich erst im weiteren Verlaufe der Rechnung erforderlich ist. Wollten wir das Verfahren hier wirklich anwenden, so würden wir gut tun, nicht direkt eine Zahl zu suchen, deren natürlicher Logarithmus gleich 1 ist, sondern etwa eine solche, deren natürlicher Logarithmus gleich $^1/_4$ ist; von dieser wäre dann e die vierte Potenz. Das würde eine einigermaßen bequemere Rechnung geben, weil nach dem Verfahren von § 30 die Logarithmen von Zahlen, die wenig von 1 verschieden sind, mit weniger Mühe erhalten werden können, als die Logarithmen größerer oder kleinerer Zahlen. Doch dürfen wir auf eine nähere Ausführung um so eher verzichten, als wir später ein viel bequemeres Mittel zur Berechnung von e oder überhaupt zur Berechnung von e^x für irgend ein x kennen lernen werden.

Diese Zahl e, deren natürlicher Logarithmus gleich 1 ist, ist für die höhere Analysis von derselben Wichtigkeit, wie die Zahl, die das Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser angibt. Man gebraucht für sie ein für allemal das Zeichen e in derselben Weise, wie man für jene Zahl das Zeichen π gebraucht.

Damit haben wir also auf die zu Anfang aufgeworfene Frage eine bejahende Antwort: *die natürlichen Logarithmen der Zahlen sind*

nichts anderes als die Logarithmen für die Basis e im gewöhnlichen Sinne der Algebra.

In Zeichen: wenn

$$e^x = y,$$

so ist

$$x = \log \text{nat}\, y.$$

Eine Potenz mit konstanter Basis und veränderlichem Exponenten nennt man eine *Exponentialfunktion;* die Potenz mit der Basis e speziell *die natürliche Exponentialfunktion.* Ihre Eigenschaften ergeben sich aus denjenigen des natürlichen Logarithmus, von dem sie die Umkehrung ist; sie dürfen übrigens als aus der Algebra bekannt vorausgesetzt werden. Die Regel zu ihrer Differentiation erhalten wir durch den allgemeinen Satz von § 22; aus ihm ergibt sich nämlich:

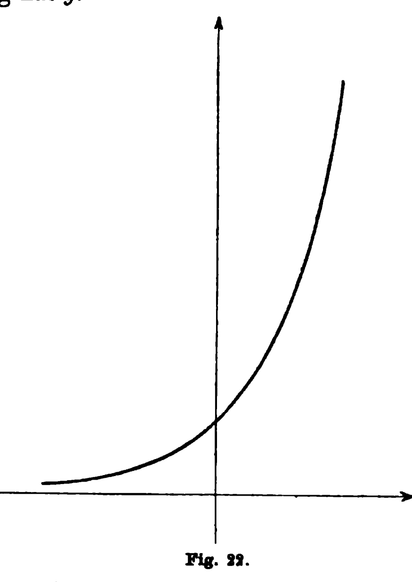


Fig. 22.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1/y} = y,$$

also:

$$\frac{de^x}{dx} = e^x.$$

Daraus folgt umgekehrt:

$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

§ 33. Integration rationaler gebrochener Funktionen. Einfachste Fälle.

Die in § 31 abgeleitete Formel

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \tag{1}$$

gilt für alle positiven Werte von x. Wie ist es aber, wenn dem x negative Werte beizulegen sind? Zur Beantwortung dieser Frage

können wir die in § 27 abgeleitete Substitutionsformel benutzen, indem wir $x = -z$ nehmen; wir erhalten dann:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{-z} \frac{dx}{dz} dz = \int \frac{1}{-z}(-1)\, dz = \int \frac{dz}{z},$$

also

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + C \tag{2}$$

für negative x.

Auf dieses einfachste Integral können wir das etwas kompliziertere

$$\int \frac{dx}{x-a}$$

mit Hilfe derselben Substitutionsformel zurückführen; wir brauchen nur

$$x - a = z \text{ oder } x - a = -z$$

zu setzen, je nachdem x größer oder kleiner als a ist. Da im ersten Falle

$$\frac{dx}{dz} = 1,$$

im zweiten

$$\frac{dx}{dz} = -1$$

ist, so erhalten wir in beiden Fällen für das gesuchte Integral den Ausdruck:

$$\int \frac{dz}{z} = \log z$$

also

$$\int \frac{dx}{x-a} = \begin{cases} \log(x-a) + C \text{ für } x > a, \\ \log(a-x) + C \text{ für } x < a. \end{cases} \tag{3}$$

Das noch allgemeinere Integral:

$$\int \frac{dx}{ax+b}$$

läßt sich auf das eben besprochene leicht zurückführen, indem man nach § 27 (2) die Konstante $\frac{1}{a}$ vor das Integralzeichen ziehen kann; man erhält so:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \begin{cases} \frac{1}{a}\log(ax+b) + C \text{ für } x > -\frac{b}{a}, \\ \frac{1}{a}\log(-ax-b) + C \text{ für } x < -\frac{b}{a}. \end{cases} \tag{4}$$

Wie aber haben wir zu verfahren, wenn der Nenner von höherem

als dem ersten Grade in Bezug auf x ist? Wir wollen zuerst ein ganz einfaches Beispiel betrachten, etwa:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)}.$$

Die Integration solcher Formen ist dadurch geglückt, daß einmal jemand auf den Gedanken kam, zu versuchen, ob man nicht den zu integrierenden Bruch

$$\frac{1}{x(x+1)}$$

in eine Summe von zwei Brüchen zerlegen könnte, von denen der eine nur x, der andere nur $x+1$ zum Nenner hätte, da ja doch umgekehrt die Summe zweier solcher Brüche bekanntermaßen einen Bruch mit dem Nenner $x(x+1)$ ergibt. Die Zähler der beiden Brüche wollen wir als vorläufig unbekannt mit A und B bezeichnen; wir fragen also: können wir A, B so bestimmen, daß die Gleichung

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \tag{5}$$

besteht; und zwar identisch, d. h. für alle Werte von x (das letztere ist wesentlich; wenn zwei Funktionen nicht für alle, sondern nur für einzelne Werte von x übereinstimmen, können wir aus dem Integral der einen nicht auf das der anderen schließen). Soll diese Gleichung identisch bestehen, so muß auch diejenige identisch bestehen, die aus ihr durch Multiplikation mit dem Hauptnenner hervorgeht, also:

$$1 = A(x+1) + Bx$$

oder

$$1 = Ax + A + Bx. \tag{6}$$

Diese letztere wird nur dann identisch bestehen, wenn auf der rechten Seite das x überhaupt nicht vorkommt und das von x freie Glied sich auf 1 reduziert, wenn also die beiden unbekannten Koeffizienten A, B die Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= A. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese beiden Gleichungen sind ihrerseits erfüllt, wenn

$$A = 1, \quad B = -1 \tag{8}$$

genommen wird. Also haben wir:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}, \tag{9}$$

und wir können uns durch Ausmultiplizieren davon überzeugen, daß das wirklich richtig ist; doch würden wir damit im wesentlichen nur die vorhergehende Rechnung wiederholen. Damit bekommen wir schließlich:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$\begin{cases} \log x - \log(x+1) + C = \log \frac{x}{x+1} + C \text{ für } x > 0; \\ \log(-x) - \log(x+1) + C = \log \frac{-x}{x+1} + C \text{ für } -1 < x < 0; \\ \log(-x) - \log(-x-1) + C = \log \frac{-x}{-x-1} + C \text{ für } x < -1. \end{cases}$$

Wollen wir auf diese Rechnung die Probe machen, so differentiieren wir den gefundenen Ausdruck; wir erhalten dann:

$$\frac{d \log \frac{x}{x+1}}{dx} = \frac{x+1}{x} \frac{d \frac{x}{x+1}}{dx} = \frac{x+1}{x} \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)};$$

also wieder die Funktion, die zu integrieren war; wie es sein muß.

(Für die Differentiation wäre es bequemer gewesen, wenn wir erst den Logarithmus des Quotienten durch die Differenz zweier Logarithmen ersetzt hätten; aber dann hätten wir nur einen Teil der vorangehenden Rechnung rückwärts durchlaufen, also keine eigentliche Probe der Rechnung erhalten.)

§ 34. Allgemeine Theorie.

Werden wir nun in dieser Weise immer verfahren können, wenn irgend eine rationale Funktion zu integrieren ist? Diese Frage ist sofort mit nein zu beantworten; wir müssen in vielen Fällen erst eine *vorbereitende Operation* ausführen. Denn die Summe beliebig vieler Brüche, mit Konstanten als Zählern und rationalen ganzen Funktionen ersten Grades als Nennern, gibt immer einen Bruch, dessen Zähler von niedrigerem Grade ist als der Nenner; wir können also einen Bruch, dessen Zähler von gleichem oder höherem Grade ist als der Nenner, nicht durch eine Summe von *„Partialbrüchen"* der angegebenen Art darstellen. Aber wir können einen Bruch, dessen Zähler nicht von niedrigerem Grade ist als der Nenner, zerlegen in eine rationale ganze Funktion und in einen Bruch, dessen Zähler von niedrigerem Grade ist als der Nenner: wir brauchen dazu nur

die Division des Nenners in den Zähler ebenso wie bei dekadisch geschriebenen Zahlen auszuführen und das Verfahren solange fortzusetzen, bis ein Rest von niedrigerem Grade als der Nenner bleibt. Das Verfahren wird zwar in den Schulen gelehrt, soll aber hier doch noch einmal an einem Beispiel gezeigt werden:

$$
\begin{array}{l}
(x^5 + 2x^2) : (x^2 - 1) = x^3 + x + 2 \\
x^5 - x^3 \\
\underline{- \quad +} \\
\quad x^3 + 2x^2 \\
\quad x^3 - \quad x \\
\quad \underline{- \quad +} \\
\qquad 2x^2 + x \\
\qquad 2x^2 - 2 \\
\qquad \underline{- \quad +} \\
\qquad\quad x + 2
\end{array}
$$

also:

$$\frac{x^5 + 2x^2}{x^2 - 1} \equiv x^3 + x + 2 + \frac{x+2}{x^2-1}.$$

Der ganze Bestandteil kann nach den Regeln von § 28 integriert werden; wir dürfen also für die weitere Untersuchung voraussetzen, daß wir mit einem Bruche zu tun haben, dessen Zähler von niedrigerem Grade als der Nenner ist.

Das *zweite*, was wir zu tun haben, wird dann sein, daß wir den Nenner in seine Faktoren ersten Grades zerlegen. In dem im vorigen Paragraphen behandelten Beispiel war der Nenner schon in Faktoren zerlegt gegeben; wenn das nicht der Fall ist, müssen wir erst die Fragen aufwerfen, ob denn eine solche Zerlegung unter allen Umständen möglich, und wie sie zu bewerkstelligen ist. Zur teilweisen Beantwortung dieser Fragen führen folgende Überlegungen:

Sei a irgend eine bestimmte Zahl. Wenn $x - a$ ein Faktor von $f(x)$ sein soll, d. h. wenn es möglich sein soll, $f(x)$ darzustellen als Produkt aus $x - a$ und einem Faktor, der einen endlichen bestimmten Wert behält, wenn man $x = a$ setzt:

$$f(x) \equiv (x - a) f_1(x), \tag{1}$$

so muß $f(x)$ gleich Null werden, wenn man darin die Variable x durch a ersetzt. Wir können sagen:

Wenn $x - a$ ein Faktor des Polynoms $f(x)$ ist, so ist a eine Lösung (Wurzel) der Gleichung $f(x) = 0$.

Umgekehrt: sei $x = a$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$; dann dividieren wir mit $x - a$ in $f(x)$, bis ein Rest bleibt, der von niedrigerer Ordnungszahl ist als $x - a$. Aber $x - a$ ist von der ersten Ordnung; soll ein Rest von noch niedrigerer Ordnungszahl sein, so kann er nur von der 0-ten Ordnung sein, da negative Ordnungszahlen hier nicht in Betracht kommen. Eine ganze Funktion 0-ter Ordnung ist aber eine Konstante; wir können also die Division soweit fortsetzen, bis nur eine Konstante als Rest bleibt; in Zeichen:

$$f(x) \equiv (x - a) f_1(x) + b. \qquad (2)$$

Angenommen nun, $x = a$ sei eine Lösung von $f(x) = 0$; dann setzen wir in der eben abgeleiteten Identität $x = a$ ein; dadurch reduziert sie sich auf

$$b = 0.$$

b muß also Null sein für $x = a$; und da es nach Voraussetzung von x nicht abhängt, so muß es überhaupt gleich Null sein, die Identität (2) muß, wenn $x = a$ eine Lösung von $f(x) = 0$ ist, die Form (1) haben: mit anderen Worten, $f(x)$ muß durch $x - a$ teilbar sein. Wir haben also auch die Umkehrung des vorigen Satzes bewiesen; wir können sagen:

Wenn a eine Lösung (Wurzel) der Gleichung $f(x) = 0$ ist, so ist $x - a$ ein Faktor des Polynoms $f(x)$.

Das Problem der Zerlegung des Polynoms $f(x)$ in seine Linearfaktoren ist also identisch mit dem Problem der Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$. Das letztere Problem ist Gegenstand der Algebra im engeren Sinne oder der Gleichungstheorie; wir entnehmen ihr ohne Beweis die folgenden Sätze:

1) Eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades hat nie mehr als n Lösungen (Wurzeln).

2) Eine Gleichung n^{ten} Grades hat immer genau n Lösungen, wenn man a) sogenannte komplexe (imaginäre) Lösungen zuläßt und b) eventuelle mehrfache Lösungen so oft zählt, als ihre Ordnungszahl angibt.

Ein Wert $x = a$ heißt nämlich eine k-fache Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ oder eine Lösung der Ordnung k, wenn das Polynom $f(x)$ durch $(x - a)^k$, aber nicht durch $(x - a)^{k+1}$ ohne Rest teilbar ist.

(Beiläufig bemerkt: wenn $x = a$ eine mehrfache Lösung von $f(x) = 0$ ist, wenn also:

$$f(x) \equiv (x - a)^2 f_1(x) \qquad (3)$$

gesetzt werden kann, so ist:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2\,(x-a)\,f_1\,(x) + (x-a)^2 \frac{df_1\,(x)}{dx}, \tag{4}$$

es ist also dann auch noch $\frac{df(x)}{dx}$ durch $x-a$ teilbar).

Durch die angeführten Sätze ist nun zwar die Möglichkeit bewiesen, eine beliebige ganze rationale Funktion in lineare Faktoren zu zerlegen; aber es ist damit noch kein Mittel gegeben, diese Zerlegung wirklich auszuführen. Für Gleichungen zweiten Grades wird in der elementaren Algebra gelehrt, wie man ihre Auflösung durch rationale Operationen und durch Wurzelausziehen bewerkstelligen kann; auch für Gleichungen dritten und vierten Grades gibt es solche Auflösungsmethoden, die allerdings die Wurzeln gerade dann, wenn sie alle reell sind, in komplexer Form liefern. Dagegen ist für allgemeine Gleichungen höheren Grades eine solche Auflösung durch Wurzelziehen nicht möglich.

Eine andere Frage ist, wie man die Lösungen einer Gleichung mit *numerischen* Koeffizienten *numerisch* durch Annäherungsmethoden mit beliebiger verlangter Genauigkeit finden kann. Eine hierfür geeignete Methode wird im weiteren Verlauf dieser Vorlesungen wiedergegeben werden; vorläufig wollen wir nur Beispiele behandeln, in welchen die Faktorenzerlegung entweder schon gegeben ist oder sich mit elementaren Mitteln erledigen läßt. Auch wollen wir vorläufig nur Fälle vornehmen, in welchen *alle Faktoren reell* sind.

Haben wir dann den Nenner einer zur Integration vorgelegten rationalen gebrochenen Funktion in Faktoren gespalten, so ist *drittens* die Frage zu behandeln, ob wir den vorgelegten Bruch unter allen Umständen in Partialbrüche zerlegen können, d. h. in Brüche, deren jeder nur einen jener Linearfaktoren zum Nenner hat. Wir wollen zunächst nur den Fall untersuchen, daß keine mehrfachen Linearfaktoren im Nenner vorkommen, sodaß also in der Zerlegung:

$$f(x) \equiv a_0\,(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\cdots \tag{5}$$

die Zahlen $a, b, c, \ldots$ alle voneinander verschieden sind. Soll dann eine Gleichung der Form:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \cdots \tag{6}$$

identisch bestehen, so muß auch diejenige Gleichung identisch be-

stehen, die aus ihr hervorgeht, indem man mit dem Nenner multipliziert, also:

$$\varphi(x) \equiv A a_0 (x-b)(x-c)\cdots + B a_0 (x-a)(x-c)\cdots \\ + C a_0 (x-a)(x-b)\cdots + \cdots \tag{7}$$

Dazu ist jedenfalls erforderlich, daß diese Gleichung auch für $x = a$ richtig ist. Aber wenn wir $x = a$ setzen, fallen rechts alle Glieder weg bis auf das erste und es bleibt nur:

$$\varphi(a) = A a_0 (a-b)(a-c)\cdots$$

also:

$$A = \frac{\varphi(a)}{a_0 (a-b)(a-c)\cdots}. \tag{8}$$

Ebenso muß die Gleichung (7), wenn sie für alle Werte von x richtig sein soll, auch für $x = b$ richtig sein; setzen wir $x = b$, so fallen rechts alle Glieder weg bis auf das zweite und es bleibt:

$$\varphi(b) = B a_0 (b-a)(b-c)\cdots$$

also:

$$B = \frac{\varphi(b)}{a_0 (b-a)(b-c)\cdots}.$$

Durch entsprechende Schlüsse finden wir, daß:

$$C = \frac{\varphi(c)}{a_0 (c-a)(c-b)\cdots}$$

sein muß u. s. w. Geben wir den Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ diese Werte, so wird die Gleichung (7) sicher richtig für $x = a$, für $x = b$ u. s. w., im ganzen also für n verschiedene Werte. Aber sie ist nur vom $(n-1)$ten Grade; wenn sie für n verschiedene Werte von x erfüllt ist, so muß sie nach dem vorhin angeführten Satze (1) *identisch*, d. h. für *alle* Werte von x erfüllt sein; damit haben wir erreicht, was wir wollten. Wir können also sagen:

In dem hier betrachteten Falle, daß die Linearfaktoren des Nenners alle reell und alle einfach sind, ist die Partialbruchzerlegung immer möglich.

Der Beweis dieses Satzes hat zugleich ein Verfahren gegeben, nach dem die Partialbruchzerlegung in jedem hierhergehörigen Falle ausgeführt werden kann. Für die Rechnung ist zuweilen ein anderes Verfahren bequemer: die Gleichung (7) wird jedenfalls dann für alle Werte von x erfüllt sein, wenn die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten übereinstimmen. Diese Forderung gibt genau n Gleichungen zur Bestimmung der n Unbekannten A, $B, \ldots$; und zwar sind die Gleichungen in diesen Unbekannten linear

(vom ersten Grade). Man kann sie also nach elementaren Methoden auflösen. Dabei erhebt sich allerdings die Frage, ob diese Auflösung denn unter allen Umständen möglich sein wird: man könnte ja befürchten, daß die Gleichungen einander widersprechen, oder auch daß sie voneinander nicht unabhängig sein könnten. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß diese Befürchtung unbegründet ist: die Divisionen, die bei der Auflösung eines solchen Gleichungssystems verlangt werden, haben nur Produkte aus Differenzen der $a, b, \ldots$ zu je zweien zu Nennern, und wir hatten ausdrücklich vorausgesetzt, daß diese Differenzen alle von Null verschieden seien. Doch brauchen wir auf die Durchführung dieser Schlußweise um so weniger einzugehen, als wir ja durch die zuerst vorgenommene Rechnung bereits wissen, daß die Auflösung möglich sein muß.

§ 35. Beispiele.

Sei das Integral vorgelegt:

$$J = \int \frac{3x + 4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\, dx \cdot \tag{1}$$

Der Zähler der zu integrierenden Funktion ist hier von niedrigerem Grade als der Nenner; die vorbereitende Division des Zählers durch den Nenner fällt also weg, und wir können sogleich an die Zerlegung des Nenners in seine Faktoren gehen. Die Auflösung einer Gleichung dritten Grades gehört freilich nicht mehr zu den hier als bekannt vorausgesetzten Elementen der Algebra; doch können wir im vorliegenden Falle leicht mit ihr zustande kommen. Denn man sieht, daß der Nenner zu Null wird, wenn man $x = 1$ setzt; es ist also $x - 1$ jedenfalls ein Faktor des Nenners. Die Ausführung der Division gibt:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6. \\
\;x^3 - x^2 \\
\underline{-\quad +\qquad} \\
\qquad - 5x^2 + 11x \\
\qquad - 5x^2 + 5x \\
\qquad \underline{+\qquad -\qquad} \\
\qquad\qquad + 6x - 6 \\
\qquad\qquad + 6x - 6 \\
\qquad\qquad -\qquad +
\end{array}$$

Es bleibt also noch $x^2 - 5x + 6$ in Faktoren zu spalten; zu diesem Zwecke lösen wir die Gleichung

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

und erhalten $x = 2$ und $x = 3$ als Wurzeln. Die drei Linearfaktoren unseres Polynoms sind also:

$$(x-1)(x-2)(x-3);$$

und zwar ist unser Polynom dem Produkt dieser Faktoren direkt gleich, da der Koeffizient der höchsten Potenz von x in ihm gleich 1 ist.

Nun setzen wir an:

$$\frac{3x+4}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

und multiplizieren herauf; das gibt:

$$3x + 4 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2).$$

Setzen wir hier $x = 1$, so erhalten wir:

$$7 = A(-1)(-2), \quad A = \tfrac{7}{2};$$

setzen wir $x = 2$, so kommt:

$$10 = B \,.\, 1 \,.\, (-1), \quad B = -10;$$

setzen wir endlich $x = 3$, so kommt:

$$13 = C \,.\, 2 \,.\, 1, \quad C = \tfrac{13}{2}.$$

Dabei haben wir die drei Unbekannten bestimmt. Wollen wir das andere Verfahren anwenden, so multiplizieren wir erst aus; das gibt:

$$3x + 4 = A(x^2 - 5x + 6) + B(x^2 - 4x + 3) + C(x^2 - 3x + 2).$$

Hier sollen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x beiderseits übereinstimmen; das verlangt:

$$\begin{array}{rl|c|c} 0 = & A + B + C & 3 & -2 \\ 3 = & -5A - 4B - 3C & 1 & \\ 4 = & -6A + 3B + 2C & & 1 \end{array}$$

Multiplikation mit den beigesetzten Faktoren und Addition ergibt:

$$3 = -2A - B,$$
$$4 = 4A + B$$

und weiter:

$$7 = 2A, \quad A = \tfrac{7}{2},$$
$$B = -2A - 3 = -10,$$
$$C = -A - B = \tfrac{13}{2}$$

wie oben.

Damit erhalten wir:

$$J = \tfrac{7}{2}\int\frac{dx}{x-1} - 10\int\frac{dx}{x+2} + \tfrac{13}{2}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= \tfrac{7}{2}\log(x-1) - 10\log(x-2) + \tfrac{13}{2}\log(x-3) + C.$$

Als zweites Beispiel möge behandelt werden:

$$J = \int\frac{2x^2-2}{2x^2-8x+6}\,dx.$$

Hier ist der Zähler von derselben Ordnung wie der Nenner; wir müssen also erst dividieren:

$$\frac{2x^2-2}{2x^2-8x+6} = 1 + \frac{8x-8}{2x^2-8x+6}.$$

Dann ist der Nenner in seine Faktoren zu zerlegen; Auflösung der Gleichung

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

ergibt

$$x = 1 \text{ oder } x = 3;$$

also ist der Nenner durch $x-1$ und durch $x-3$ teilbar. Er ist aber nicht einfach gleich dem Produkt dieser Faktoren, denn der Koeffizient der höchsten vorkommenden Potenz von x in ihm ist nicht gleich 1, sondern gleich 2, wir haben also:

$$2x^2 - 8x + 6 \equiv 2(x-1)(x-3).$$

Damit wird der Ansatz der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{8x-8}{2x^2-8x+6} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Heraufmultiplizieren ergibt:

$$8x - 8 \equiv 2A(x-3) + 2B(x-1),$$

Koeffizientenvergleichung dann:

$$8 = 2A + 2B,$$
$$-8 = -6A - 2B;$$

und folglich:

$$A = 0, \quad B = 4.$$

Hier ist also der vorgelegte Bruch mit einem Nenner zweiten Grades einem einzigen Bruch mit einem Nenner ersten Grades gleich; in der Tat kann man mit $x-1$ heben, wie es in einem solchen Falle stets möglich sein muß. Man erhält so schließlich:

$$J = \int dx + 4\int\frac{dx}{x-3} = x + 4\log(x-3) + C.$$

§ 36. Mehrfache Wurzeln.

Das in den letzten Paragraphen gelehrte Verfahren setzt voraus, daß die Linearfaktoren des Nenners alle voneinander verschieden sind. Treten im Nenner mehrfache Faktoren auf, so bedarf es einer Modifikation. Es genügt nämlich in diesem Fall nicht, wenn man jedem solchen mehrfachen Faktor nur einen Partialbruch zuordnet; der Versuch der Koeffizientenbestimmung würde dann im allgemeinen auf Gleichungen führen, die einander widersprechen. Man muß vielmehr jedem solchen Faktor $(x-a)^k$ k verschiedene Partialbrüche zuordnen, die bzw. $(x-a)^k$, $(x-a)^{k-1}$, $\ldots$ $(x-a)^2$, endlich $x-a$ selbst zu Nennern und Konstante zu Zählern haben. Ist z. B. das Integral:

$$J=\int \frac{1-x}{x(x+1)^2}\,dx \tag{1}$$

vorgelegt, so hat man die Partialbruchzerlegung anzusetzen:

$$\frac{1-x}{x(x+1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}, \tag{2}$$

also die Gleichung

$$1-x=A(x+1)^2+B\,x(x+1)+Cx \tag{3}$$

zur identischen zu machen. Hier lassen sich A und C leicht bestimmen, indem man einmal $x=0$, das andere Mal $x=-1$ setzt. Auch B kann man auf ähnliche Weise bestimmen, man muß dann nur sagen: sollen die beiden Seiten von (3) für alle Werte von x übereinstimmen, so müssen auch ihre nach x genommenen Differentialquotienten für alle Werte von x übereinstimmen, also muß:

$$-1\equiv 2A(x+1)+B(2x+1)+C$$

sein. Einfacher ist es, sich in diesem Falle des zweiten der in § 34 gelehrten Verfahren zu bedienen und die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von x auf den beiden Seiten der angesetzten Gleichung zu vergleichen; das gibt zur Bestimmung der drei Unbekannten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0&=A+B\\ -1&=2A+B+C\\ 1&=A, \end{aligned}$$

die durch

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-1-2A-B=-2$$

befriedigt werden. Schließlich erhält man:

$$J = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \log x - \log(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$$

Das Integral eines derartigen Bruches enthält also nicht nur logarithmische, sondern auch algebraische Bestandteile.

Anwendung der letzten Resultate auf die Bestimmung des Verlaufs chemischer Vorgänge.

§ 37. Zuckerinversion.

Die meisten chemischen Reaktionen gehen nicht instantan vor sich, sondern sie bedürfen zu ihrem Ablauf einer gewissen Zeit. Unterbricht man die Reaktion bald nach ihrem Beginn, so findet man, daß nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der vorhandenen Substanzen in die neuen Verbindungen eingegangen ist, während sich ein großer Teil noch in den ursprünglichen befindet. Läßt man die Reaktion länger währen und sorgt dabei für geeignete Mischung, so findet man, daß sie immer weiter geht; und zwar in den meisten Fällen, daß ihre Geschwindigkeit dabei fortwährend abnimmt. Man wird aus solchen Beobachtungen schließen, daß die Geschwindigkeit der Reaktion von der Menge der noch vorhandenen nicht umgesetzten Substanzen abhängt. Nach welchem Gesetze, darüber haben die norwegischen Gelehrten GULDBERG und WAAGE vor bald 40 Jahren eine Hypothese aufgestellt, deren Konsequenzen sich in vielen Fällen mit der Erfahrung in Übereinstimmung gezeigt haben. Mit dem einfachsten Falle dieses *„Massenwirkungsgesetzes"* hat man zu tun, wenn es sich um intramolekulare Umsetzungen innerhalb eines und desselben Körpers handelt, aber auch in anderen Fällen wie z. B. bei der Zuckerinversion; in diesen Fällen ist die Reaktionsgeschwindigkeit einfach der Menge der bis zu dem Augenblick noch nicht umgewandelten Substanz proportional. Seien a Grammolekeln nicht invertierter Zucker zur Zeit $t = 0$ vorhanden; zur Zeit t seien x Grammolekeln invertiert, also $a - x$ Grammolekeln noch nicht invertiert; dann ist die Reaktionsgeschwindigkeit zur Zeit t, für die

wir schon früher (§ 6, § 13) den Ausdruck $\frac{dx}{dt}$ gefunden hatten, zu $a - x$ proportional. Nennen wir den Proportionalitätsfaktor k, so haben wir demgemäß:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x), \tag{1}$$

und aus dieser Gleichung ist x als Funktion von t zu bestimmen. Diese Aufgabe hat nicht genau die Form, wie die in den letzten Paragraphen behandelten: der Differentialquotient von x nach t ist hier nicht als Funktion der unabhängigen Variabeln t, sondern als Funktion der abhängigen Variabeln x gegeben. Aber wir können die bisherige Form leicht erreichen, wenn wir uns der Regel von § 22 erinnern; mit ihrer Hilfe ergibt sich aus (1):

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a - x)} \tag{2}$$

und das hat jetzt genau die in § 33 behandelte Form. Dabei kommt hier, der Natur der Aufgabe nach, nur der Fall $x < a$ in Betracht; wir haben also in der dortigen Formel (4) a durch k, b durch ak zu ersetzen und finden so:

$$t = -\frac{1}{k} \log(a - x) + C. \tag{3}$$

Die Konstante ist durch das Massenwirkungsgesetz nicht bestimmt. Aber es liegt in der Aufgabe noch ein Datum vor, das wir bisher nicht berücksichtigt haben: zur Zeit $t = 0$ war noch nichts invertiert, also $x = 0$. Es muß also:

$$0 = -\frac{1}{k} \log a + C,$$

oder:

$$C = \frac{1}{k} \log a \tag{4}$$

sein; setzen wir den so gefundenen Wert in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir:

$$t = \frac{1}{k}(\log a - \log(a - x)) = \frac{1}{k} \log \frac{a}{a - x} = \frac{1}{k} \log \frac{1}{1 - \frac{x}{a}}. \tag{5}$$

In diesen Formen beantwortet die Lösung zunächst die Frage: wie lange dauert es, bis eine bestimmte Menge Zucker invertiert ist? Schreiben wir sie in der dritten Form, so sehen wir, daß diese Zeit nur von dem Verhältnis x/a abhängt; wie natürlich.

Wollen wir die umgekehrte Frage beantworten: wieviel ist nach Ablauf einer bestimmten Zeit umgesetzt? — so müssen wir die gefundene Gleichung nach x auflösen. Wir erhalten der Reihe nach:

$$kt = \log \frac{1}{1 - \frac{x}{a}}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = e^{kt}$$

$$1 - \frac{x}{a} = e^{-kt}$$

und schließlich:

$$x = a\,(1 - e^{-kt}). \tag{6}$$

Stellen wir diese Gleichung durch eine Kurve im Koordinatensystem der x und t dar — wobei nur positive Werte von t für uns eine Bedeutung haben —, so sehen wir, daß die Kurve durch den Nullpunkt hindurch geht unter einem Winkel, für dessen Tangente sich aus der Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = ake^{-kt} \tag{7}$$

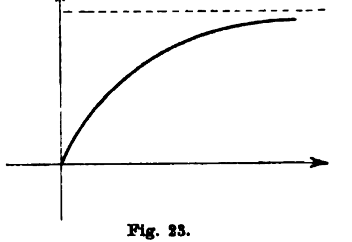


Fig. 23.

die aus (6) folgt, der Wert ak ergibt. Von da an wächst x mit wachsendem t; denn der Differentialquotient ist beständig positiv. Es wächst aber nicht über alle Grenzen: für sehr große Werte von t ist $1 - \frac{x}{a}$ sehr klein, x also sehr wenig von a verschieden. Die Gerade $x = a$ ist demnach eine Asymptote der Kurve, die sich ihr von der unteren Seite her nähert.

Der Faktor $1/k$ hat eine einfache Bedeutung, wie man aus den Formeln ersieht: er bedeutet die Zeit, die erforderlich ist, um den Wert von $a - x$ (also die Menge der nicht umgesetzten Substanz) auf den e^{ten} Teil ihres ursprünglichen Betrages zu reduzieren. Er hat übrigens für verschiedene Reaktionen, die unter diesen Ansatz fallen, sehr verschiedene Werte.

Da x, wie aus den Formeln hervorgeht, den Wert a für keinen endlichen Wert von t erreicht, so folgt: *Eine Reaktion, die genau nach dem hier angenommenen Gesetz vor sich geht, kommt nie zu Ende, indem sich ihre Geschwindigkeit fortwährend verringert.* Natürlich wird dieses

Resultat experimentell durch mancherlei Nebenumstände, namentlich durch Temperaturänderungen modifiziert. Von praktischem Interesse ist auch eigentlich gar nicht die Frage, wie lange es dauert, bis *alles* umgesetzt ist, sondern nur die Frage, wie lange es dauert, bis so viel umgesetzt ist, daß der Rest sich durch die chemische Analyse nicht mehr fassen läßt. Das kommt natürlich darauf an, wie klein die Menge ist, die sich eben noch konstatieren läßt; ist diese bekannt, so wird die Frage durch die Gleichung (5) beantwortet.

Die bisherigen Erörterungen setzen voraus, daß der Wert von k aus früheren Beobachtungen derselben Reaktion bestimmt sei, und daß es sich nur darum handelt, das bereits bekannte Gesetz auf ein neues Experiment anzuwenden, bzw. durch dieses zu kontrollieren. Sind wir andererseits sicher, oder glauben wir sicher zu sein, daß eine Reaktion nach diesem Gesetze vor sich geht, kennen wir aber den Wert von k nicht, so brauchen wir nur die Gleichung nach k aufzulösen, was

$$k = \frac{1}{t} \log \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} \tag{8}$$

ergibt, und dann nur eine Beobachtung anzustellen, die zusammengehörige Werte von t und x liefert, und diese Werte in die Gleichung (8) einzusetzen. Wenn wir aber beides wollen: den Wert von k bestimmen und zugleich kontrollieren, ob der Prozeß wirklich nach dem angenommenen Gesetze vor sich geht, so reicht *eine* Beobachtung nicht aus: wir werden dann mindestens zu zwei verschiedenen Zeiten Proben nehmen und analysieren müssen, um so zwei Paare zusammengehöriger Werte (t_1, x_1) und (t_2, x_2) zu erhalten. Diese beiden Paare müssen dann, in (8) eingesetzt, übereinstimmende Werte von k liefern. Tatsächlich wird das, der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wegen, niemals der Fall sein: man wird sich mit einer näherungsweisen Übereinstimmung begnügen müssen. Um einen zuverlässigeren Wert von k zu erhalten, wird man nicht nur zwei Beobachtungen anstellen, sondern eine größere Anzahl, und aus den so berechneten Werten von k in später noch genauer zu besprechender Weise ein Mittel nehmen.

Dabei ist jedoch noch eine praktische Schwierigkeit zu berücksichtigen: es ist nicht immer möglich, den Zeitmoment des Beginns der Reaktion scharf zu beobachten, und außerdem hat man häufig mit Fällen zu tun, in welchen von Anfang an beide Modifikationen

der Substanz in der Mischung vorhanden sind. Unter solchen Umständen wird die Konstante nicht durch Benutzung des Wertes $x = 0$ bestimmt werden können, sondern man wird irgend einen anderen Wert x_0 von x samt dem zugehörigen Wert t_0 von t benutzen müssen. Das gibt:

$$t_0 = -\frac{1}{k}\log(a - x_0) + C \tag{9}$$

und wenn wir C aus dieser Gleichung entnehmen und in (3) einsetzen:

$$t - t_0 = \frac{1}{k}\log\frac{a - x_0}{a - x}.$$

Damit ist die Bestimmung von k aus zwei Beobachtungen wieder möglich, unabhängig von dem Anfangsmoment der Zeitzählung.

Endlich ist noch der auch wohl vorkommende Fall zu berücksichtigen, daß uns an einer näheren Bestimmung von k überhaupt weniger liegt als an der Konstatierung, ob der Prozeß überhaupt nach dem gegebenen Gesetze vor sich geht. Um die Formeln auf eine für diesen Fall geeignete Gestalt zu bringen, nehmen wir drei Beobachtungen und stellen für sie die Gleichungen

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{k}\log\frac{a - x_0}{a - x_1}, \qquad t_2 - t_1 = \frac{1}{k}\log\frac{a - x_1}{a - x_2} \tag{10}$$

nebeneinander; die aus beiden sich ergebenden Werte von k müssen übereinstimmen, und es muß also:

$$(t_2 - t_1):(t_1 - t_0) = \log\frac{a - x_0}{a - x_1} : \log\frac{a - x_1}{a - x_2} \tag{11}$$

sein. Der Prozeß wird nach dem angenommenen Gesetze vor sich gehen, wenn diese Gleichung für irgend drei Paare zusammengehöriger Werte von x und t erfüllt ist.

Da wir es meistens in der Hand haben, zu welchen Zeiten wir Proben nehmen wollen, so können wir es so einrichten, daß

$$t_2 - t_1 = t_1 - t_0$$

wird, d. h. wir können die Proben in gleichen Zeitabständen voneinander nehmen. Dann vereinfacht sich die Gleichung (11) zu:

$$\frac{a - x_0}{a - x_1} = \frac{a - x_1}{a - x_2}. \tag{12}$$

Man kann das so aussprechen: *Wenn die Zeiten in arithmetischer Progression wachsen, nimmt die Menge noch nicht umgesetzter Substanz in geometrischer Progression ab.* (Wenn etwa in einem einzelnen Falle nach einer halben Stunde die Hälfte der ursprünglichen Substanz

noch übrig ist, wird nach einer Stunde noch der 4., nach $1^1/_2$ Stunden noch der 8., nach 2 Stunden noch der 16. Teil vorhanden sein u. s. w.; nach 5 Stunden also noch etwa der 1000te Teil.)

§ 38. Vollständige chemische Reaktionen.

Viele chemische Reaktionen, bei welchen mehrere Körper aufeinander wirken, kommen nicht zum Stillstand, solange überhaupt noch etwas von den ursprünglichen Substanzen vorhanden ist. Für eine Anzahl derartiger Vorgänge hat sich gezeigt, daß die Reaktionsgeschwindigkeit dem Produkt der vorhandenen noch nicht umgesetzten Mengen proportional gesetzt werden kann. Seien $a, b, \ldots$ die Anzahlen von Grammolekeln der verschiedenen aufeinander wirkenden Substanzen, die zu Beginn der Zeitzählung vorhanden waren, x die bis zur Zeit t umgesetzten Mengen, sodaß also zur Zeit bzw. noch $a-x, b-x, \ldots$ Grammolekeln von den ursprünglich gegebenen Substanzen vorhanden seien; dann kann man für die Reaktionsgeschwindigkeit den Ansatz bilden:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)\ldots \tag{1}$$

Wir wollen nur den Fall besprechen, daß nur zwei verschiedene Substanzen aufeinander einwirken; dann haben wir umgekehrt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)(b-x)}. \tag{2}$$

Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} \tag{3}$$

verlangt

$$1 = A(b-x) + B(a-x), \tag{4}$$

also:

$$\begin{array}{l|l|l} 1 = Ab + Ba & 1 & 1 \\ 0 = -A - B & a & b. \end{array} \tag{5}$$

Multiplikation mit den beigesetzten Faktoren ergibt:

$$A = \frac{1}{b-a}, \qquad B = \frac{1}{a-b}. \tag{6}$$

Damit erhalten wir zunächst:

$$t = \frac{1}{k(a-b)}\left\{-\int\frac{dx}{a-x} + \int\frac{dx}{b-x}\right\}. \tag{7}$$

Um zu entscheiden, welche von den in § 33, (3) angeführten Werten dieser Integrale zu nehmen sind, müssen wir uns überlegen, daß nur Werte von x in Betracht kommen, die sowohl kleiner als a, als auch kleiner als b sind; wir haben also zu setzen:

$$t = \frac{1}{k(a-b)} \{ \log (a-x) - \log (b-x) \} + C. \tag{8}$$

(In dieser Gestalt ist die Formel unter der Voraussetzung geeignet, daß mit a die größere der beiden Zahlen a und b, d. h. die Menge derjenigen Substanz bezeichnet ist, die zu Anfang im Überschuß vorhanden war; wäre das nicht der Fall, so würden wir zweckmäßig im Zähler und Nenner die Vorzeichen ändern, wodurch am Wert der Formel nichts geändert, aber erreicht würde, daß Zähler und Nenner positiv werden.)

Die Konstante bestimmt sich wie im vorigen Falle. Geht die Beobachtung vom Beginn der Reaktion aus, so haben wir für $t = 0$ auch $x = 0$; also muß

$$0 = \frac{1}{k(a-b)} \{ \log a - \log b \} + C \tag{9}$$

sein. Damit erhalten wir für diesen Fall:

$$t = \frac{1}{k(a-b)} \log \frac{b(a-x)}{a(b-x)}. \tag{10}$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach x ergibt der Reihe nach:

$$k(a-b)\,t = \log \frac{b(a-x)}{a(b-x)},$$

$$\frac{b(a-x)}{a(b-x)} = e^{k(a-b)t},$$

$$x = \frac{ab\,(e^{k(a-b)t} - 1)}{a e^{k(a-b)t} - b} = ab \frac{1 - e^{-k(a-b)t}}{a - b e^{-k(a-b)t}}. \tag{11}$$

Mit wachsendem t nimmt x fortwährend zu, bis es für sehr große Werte von t, für die

$$e^{-k(a-b)t}$$

sehr klein ist, den Wert $\frac{ab}{a} = b$ erreicht. Die Reaktion geht also so lange weiter, bis diejenige Substanz, die ursprünglich nicht im Überschuß vorhanden war, vollständig aufgezehrt ist (daher die Bezeichnung „vollständige Reaktion"); aber das tritt theoretisch, wenn die Reaktion wirklich nach dem angenommenen Gesetze vor sich

geht, erst nach unendlich langer Zeit ein. Von praktischem Interesse ist wieder nur die Frage, wie lange es dauert, bis kein merklicher Rest von b mehr vorhanden ist; diese Frage kann beantwortet werden, indem man in die Gleichung (10) einen von b so wenig verschiedenen Wert von x einsetzt, als der Genauigkeitsgrenze der Beobachtungen entspricht. Die Antwort wird natürlich ganz wesentlich von dem Wert der Konstanten k abhängen, die für verschiedene Reaktionen, die unter den hier besprochenen Ansatz fallen, sehr verschiedene Werte hat.

Ist der Beginn der Reaktion nicht beobachtet, oder war zu Beginn schon von dem Reaktionsprodukt etwas vorhanden, so müssen wir irgend zwei zusammengehörige Werte t_0, x_0, zur Konstantenbestimmung verwenden. Das gibt zunächst:

$$t_0 = \frac{1}{k(a-b)} \{\log(a - x_0) - \log(b - x_0)\} + C, \tag{12}$$

und wenn wir C eliminieren:

$$t - t_0 = \frac{1}{k(a-b)} \log \frac{(a-x)(b-x_0)}{(b-x)(a-x_0)}. \tag{13}$$

Liegt uns nichts an der Bestimmung des Wertes von k, sondern wollen wir nur überhaupt prüfen, ob die Reaktion nach dem angenommenen Gesetze vor sich geht, so wählen wir wieder am besten drei äquidistante Beobachtungszeiten t_0, t_1, t_2, d. h. drei solche, daß

$$t_2 - t_1 = t_1 - t_0 \tag{14}$$

ist; setzen wir dann die Gleichung (13) einmal für t_0 und t_1, das anderemal für t_1 und t_2 an und verbinden die beiden so erhaltenen Gleichungen, so finden wir, daß in diesem Falle

$$\frac{a-x_2}{b-x_2} : \frac{a-x_1}{b-x_1} = \frac{a-x_1}{b-x_1} : \frac{a-x_0}{b-x_0} \tag{15}$$

sein muß.

Für den Fall

$$b = a, \tag{16}$$

d. h. für den Fall, daß zu Anfang äquivalente Mengen der beiden aufeinander wirkenden Substanzen vorhanden waren, versagen die bisherigen Formeln. Wir erhalten dann:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{k(a-x)^2} \tag{17}$$

und daraus durch Integration:

$$t = \frac{1}{k(a-x)} + C.$$

Bestimmen wir die Konstante wieder durch die Bedingung, daß für $t = 0$ auch $x = 0$ sich ergeben soll, so erhalten wir:

$$t = \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right\} \tag{18}$$

und daraus:

$$\frac{1}{a-x} = kt + \frac{1}{a}$$

$$a - x = \frac{a}{1+akt}$$

$$x = a\left(1 - \frac{1}{1+akt}\right) = \frac{a^2kt}{1+akt} = \frac{a}{1+\frac{1}{akt}}. \tag{19}$$

Auch hier wird für $t = \infty$, aber auch erst dann, x *streng* gleich a; die praktische Frage nach der Dauer der Zeit, bis *merklich* alles umgesetzt ist, ist wieder den jeweiligen Ansprüchen an Genauigkeit gemäß mit Hilfe der Form (18) der Gleichung zu beantworten.

Ist der Beginn der Reaktion nicht beobachtet, so ist die Konstante mit Hilfe von irgend zwei anderen zusammengehörigen Werten von x und t zu bestimmen; man erhält dann:

$$t - t_0 = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a-x_0}\right). \tag{20}$$

Daraus ergibt sich durch Elimination von k, wenn t_0, t_1, t_2 drei äquidistante Zeitmomente, x_0, x_1, x_2 die zugehörigen Werte von x sind, analog wie oben:

$$\frac{1}{a-x_2} - \frac{1}{a-x_1} = \frac{1}{a-x_1} - \frac{1}{a-x_0}. \tag{21}$$

In diesem Falle wachsen also die reziproken Werte der nicht umgesetzten Mengen in arithmetischer Progression, wenn die Zeiten in arithmetischer Progression wachsen.

§ 39. Unvollständige chemische Reaktionen.

In komplizierteren Fällen schreitet die Reaktion nicht soweit fort, daß alle zuerst nicht im Überschusse vorhandene Substanz umgesetzt wird, sondern es tritt schließlich ein Gleichgewichtszustand ein, bei dem sowohl von den beiden ursprünglichen Kombinationen, als auch von den Reaktionsprodukten bestimmte Mengen vorhanden

sind. Um derartige Vorgänge zu erklären, hat man angenommen, der Ausdruck für die Reaktionsgeschwindigkeit setze sich in solchen Fällen aus zwei Gliedern zusammen, von denen das eine dem Produkt der Mengen der beiden aufeinander wirkenden Verbindungen, das andere dem Produkt der Mengen der neu entstehenden Kombinationen proportional sei, jedes mit einem andern Proportionalitätsfaktor. Der einfachste Fall ist auch hier wieder der, daß es sich um innere Umsetzungen innerhalb einer einzelnen Molekel handelt; Verhältnisse dieser Art treten namentlich auf bei der Bildung eines sogenannten Laktons (inneren Anhydrids) aus einer Säure. Um gleich den allgemeinsten Fall zu behandeln, wollen wir annehmen, es seien zu Beginn der Beobachtung a_1 Grammolekeln Säure und a_2 Grammolekeln Lakton vorhanden. Zur Zeit t hätten sich weitere x Grammolekeln Säure in Lakton umgewandelt, sodaß also dann $a_1 - x$ Grammolekeln Säure und $a_2 + x$ Grammolekeln Lakton vorhanden sind. Die erwähnte Annahme gibt für die Reaktionsgeschwindigkeit den Ansatz:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a_1 - x) - k_2(a_2 + x) = k_1 a_1 - k_2 a_2 - (k_1 + k_2)x \qquad (1)$$

wenn mit k_1 und k_2 die beiden Proportionalitätsfaktoren bezeichnet werden. Die Gleichung hat dieselbe Form, wie die von § 37, nur mit anderer Bedeutung der Koeffizienten; wir brauchen also die weitere Rechnung nicht noch einmal zu wiederholen, sondern können gleich die Resultate anschreiben:

$$t = \frac{1}{k_1 + k_2} \log \frac{k_1 a_1 - k_2 a_2}{k_1 a_1 - k_2 a_2 - (k_1 + k_2)x} \qquad (2)$$

oder nach x aufgelöst:

$$x = \frac{k_1 a_1 - k_2 a_2}{k_1 + k_2}\left(1 - e^{-(k_1 + k_2)t}\right). \qquad (3)$$

Aber für die Diskussion haben wir jetzt zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Sind die Mischungsverhältnisse zu Anfang derart, daß

$$k_1 a_1 - k_2 a_2 > 0 \qquad (4)$$

ist, so ist $\frac{dx}{dt}$ zu Anfang positiv, d. h. die Menge des Laktons nimmt zunächst zu; und diese Zunahme geht weiter, solange bis

$$x = \frac{k_1 a_1 - k_2 a_2}{k_1 + k_2} \qquad (5)$$

wird, da $\frac{dx}{dt}$ solange positiv bleibt. Aber aus der Gleichung (3) geht

hervor, daß x (theoretisch) diesen Wert erst nach unendlich langer Zeit erreicht; der einmal begonnene Prozeß geht also auch hier immer in derselben Richtung weiter. Dabei wird jedoch nicht alle Säure in Lakton verwandelt; wie lange man auch die Beobachtung ausdehnt, man bekommt, wenn die Reaktion wirklich genau nach dem angenommenen Gesetze vor sich geht, niemals mehr Lakton als durch die rechte Seite von (5) angegeben wird. Wie lange Zeit erforderlich ist, bis dieser Zustand merklich erreicht wird, hängt wieder wesentlich von den Werten der Konstanten k_1 und k_2, genauer gesagt von ihrer Summe ab; wenn sie nicht sehr klein ist, keine so sehr lange Zeit. Man kann also durch Beobachtung dieses schließlich eintretenden annähernden Gleichgewichtszustands die auf der rechten Seite von (5) stehende Größe und aus ihr, wenn a_1 und a_2 bekannt sind, das Verhältnis $k_2 : k_1$ bestimmen; ist dieses Verhältnis gefunden, so liefert die Beobachtung des Verlaufs der Reaktion die Summe $k_1 + k_2$ ganz ebenso, wie in § 35 das dort allein vorkommende k.

2. Ist aber zu Anfang

$$k_1 a_1 - k_2 a_2 < 0, \tag{6}$$

so ist $\frac{dx}{dt}$ zunächst negativ, die Menge des vorhandenen Laktons nimmt also zunächst ab, es wird etwas Säure aus dem Lakton zurückgebildet. Das geht dann unbegrenzt so weiter, wie eine der vorigen ganz analoge Diskussion zeigen würde. Indessen haben wir nicht nötig, diesen Fall noch besonders durchzudiskutieren, da wir ihn einfach dadurch auf den vorigen zurückführen, daß wir die auf die Säure und die auf das Lakton bezüglichen Größen miteinander vertauschen.

Von unvollständigen chemischen Reaktionen, bei welchen zwei verschiedene Substanzen aufeinander einwirken, wollen wir nur die Bildung eines Äthers aus einer Säure und einem Alkohol besprechen, aber auch diese nur für den Fall, daß zu Anfang äquivalente Mengen Säure und Alkohol vorhanden sind und noch nichts umgesetzt ist. Wir können dann die zu Anfang vorhandenen Mengen Säure und Alkohol beide mit 1 bezeichnen; sind zur Zeit t, x Grammolekeln Äther gebildet, so liefert die besprochene Annahme für die Reaktionsgeschwindigkeit den Ansatz:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(1 - x)^2 - k_2 x^2, \tag{7}$$

aus dem sich:

$$t = \int \frac{dx}{k_1 (1-x)^2 - k_2 x^2} \tag{8}$$

ergibt. Hier müssen wir zunächst die Gleichung

$$k_1 (1-x)^2 - k_2 x^2 = 0 \tag{9}$$

auflösen; wir erhalten $\frac{1-x}{x} = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$ und damit die beiden Wurzeln

$$\alpha = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}, \qquad \beta = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}. \tag{10}$$

(Die Bezeichnung ist, wie man sieht, so gewählt, daß α die größere, β die kleinere der beiden Wurzeln ist.)

Für die Partialbruchzerlegung (vgl. § 34) müssen wir beachten, daß im Nenner von (8) nicht einfach das Produkt der beiden Linearfaktoren $(x-\alpha)(x-\beta)$ steht, sondern dieses Produkt noch multipliziert mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz von x in (9), d. h. mit $k_1 - k_2$; wir erhalten also:

$$\frac{1}{k_1 (1-x)^2 - k_2 x^2} = \frac{1}{(k_1 - k_2)(\alpha - \beta)} \left\{ \frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right\}$$

oder, wenn wir vor der Klammer α und β durch ihre Werte (10) ersetzen und reduzieren:

$$= \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \left\{ \frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right\} \tag{11}$$

und daraus durch Integration, solange x kleiner als β ist:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \left\{ \log \frac{\alpha - x}{\beta - x} - \log \frac{\alpha}{\beta} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}} \log \frac{\beta(\alpha - x)}{\alpha(\beta - x)}. \tag{12}$$

Lösen wir diese Gleichung nach x auf, so erhalten wir zunächst:

$$\frac{\beta(\alpha - x)}{\alpha(\beta - x)} = e^{2t\sqrt{k_1 k_2}}$$

und daraus:

$$x = \alpha\beta \frac{1 - e^{-2t\sqrt{k_1 k_2}}}{\alpha - \beta e^{-2t\sqrt{k_1 k_2}}}. \tag{13}$$

Für $t = \infty$ wird $x = \beta$; wir erhalten also durch Beobachtung des schließlich eintretenden Gleichgewichtszustandes dieses β und aus ihm

das Verhältnis der beiden Konstanten k_1 und k_2. Ist letzteres bekannt, so kann aus irgend zwei zusammengehörigen Werten von x und t vermittelst der Gleichung (13) das Produkt dieser beiden Faktoren berechnet und daraus dann k_1 und k_2 einzeln bestimmt werden.

Für Essigsäure und Äthylalkohol z. B. ist $\frac{k_1}{k_2} = 4$, also $\alpha = 2$, $\beta = {}^2/_3$ und

$$x = 2\,\frac{1 - e^{-2t\sqrt{k_1 k_2}}}{3 - e^{-2t\sqrt{k_1 k_2}}}\,.$$

Sechster Abschnitt.

Höhere Differentialquotienten, Mittelwertsatz und Taylorsche Formel.

§ 40. Höhere Differentialquotienten.

Der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ hat in denjenigen Fällen, mit welchen wir hier zu tun haben, für alle in Betracht kommenden Werte von x, einzelne vielleicht ausgenommen, einen bestimmten Wert. Wir können ihn daher, gemäß der allgemeinen Definition des Wortes Funktion (§ 13), ebenfalls als eine Funktion von x betrachten. Als solche bezeichnen wir ihn mit $f'(x)$ und nennen ihn die *derivierte* oder *abgeleitete* Funktion von $f(x)$, auch wohl kurz die *Ableitung.*[1])

In allen Fällen, in welchen $f(x)$ selbst zu einer der bisher betrachteten Funktionsklassen gehört, gehört auch $f'(x)$ zu einer von ihnen. Wir können daher die bisher abgeleiteten Regeln des Differentiierens auch auf $f'(x)$ anwenden; wir erhalten so eine neue Funktion, die wir „die zweite Ableitung von $f(x)$" nennen und mit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \tag{1}$$

bezeichnen. (Die eigentümliche Stellung der 2, im Zähler am d, im Nenner am x, wird später [§ 63] erklärt werden). Ist z. B.

$$f(x) = x^n,$$

so ist:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

und daher:

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$

---

1) Wenn man sich dieser Bezeichnung bedienen will, wird man natürlich vermeiden, den Akzent noch in anderer Bedeutung, — als bloßes Unterscheidungszeichen, — zu benutzen.

Ist

$$f(x) = e^x,$$

so ist nicht nur:

$$f'(x) = e^x,$$

sondern auch:

$$f''(x) = e^x.$$

Ist $f(x) = \log x$, so ist:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Überhaupt brauchen wir, wie gesagt, zur Bildung des zweiten Differentialquotienten keine neuen Regeln, sondern haben nur die früheren zweimal hintereinander anzuwenden. Von den sich so ergebenden Formeln soll nur eine noch ausdrücklich angeführt werden, nämlich diejenige für die zweimalige Differentiation eines Produktes: ist $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, so erhalten wir zuerst nach § 18:

$$f'(x) = \varphi(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\psi(x),$$

und wenn wir dann dieselbe Regel noch einmal anwenden:

$$f''(x) = [\varphi(x)\psi''(x) + \varphi'(x)\psi'(x)] + [\varphi'(x)\psi'(x) + \varphi''(x)\psi(x)],$$

also wenn wir zusammenziehen:

$$f''(x) = \varphi(x)\psi''(x) + 2\varphi'(x)\psi'(x) + \varphi''(x)\psi(x). \tag{2}$$

Der zweite Differentialquotient hat auch eine einfache geometrische Bedeutung für die Kurve, die in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $y = f(x)$ dargestellt wird. Wir haben nämlich früher gesehen, daß $f(x)$ mit wachsendem x zunimmt, so lange $f'(x)$ positiv ist. Wenden wir diesen Satz auf $f'(x)$ an, so sehen wir zunächst, daß $f'(x)$ mit wachsendem x zunimmt, so lange $f''(x)$ positiv ist. Dann nimmt also die Geschwindigkeit der Zunahme von x mit wachsendem x zu. Aber wenn hier von Zu- oder Abnahme die Rede ist, so ist das algebraisch, nicht vom absoluten Betrage zu verstehen, d. h. so, daß von zwei negativen Zahlen diejenige größer heißt, die den kleineren absoluten Betrag hat. Nehmen wir auch auf die Vorzeichen Rücksicht, so haben wir folgende vier Fälle zu unterscheiden:

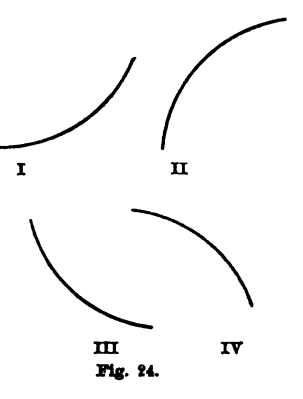


Fig. 24.

I. Ist $f' > 0$, $f'' > 0$, so wächst f und zwar zuerst langsamer und dann schneller.

II. Ist $f' > 0$, $f'' < 0$, so wächst f und zwar zuerst schneller und dann langsamer.

III. Ist $f' < 0$, $f'' > 0$, so nimmt f ab und zwar zuerst schneller und dann langsamer.

IV. Ist $f' < 0$, $f'' < 0$, so nimmt f ab und zwar zuerst langsamer und dann schneller.

In den Fällen (I) und (III) ist die Kurve konkav nach oben, konvex nach unten; in den Fällen (II) und (IV) ist die Kurve konvex nach oben, konkav nach unten. Wir können also sagen:

$f'' > 0$ *heißt: Kurve konkav nach oben;*
$f'' < 0$ *heißt: Kurve konvex nach oben.*

(Die hier auftretende Unterscheidung von „unten" und „oben" hängt natürlich damit zusammen, daß wir verabredet haben, die y nach oben positiv zu rechnen.)

Auch die mechanische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten ist einfach. f' bedeutet die Geschwindigkeit der Änderung von f; f'' bedeutet also die „Geschwindigkeit der Änderung der Geschwindigkeit". Das nennt man die *Beschleunigung.* Viele Bewegungserscheinungen lassen sich am einfachsten dadurch beschreiben, daß man die Beschleunigung angibt; es stellt sich heraus, daß sie nur von dem augenblicklichen Zustande des sich Bewegenden und seiner Umgebung abhängt, während die Geschwindigkeit erst bestimmt werden kann, wenn man auch frühere Zustände kennt (bei einem fallenden Körper z. B. kann man seine Geschwindigkeit für einen gegebenen Augenblick nur dann bestimmen, wenn man weiß, ob er frei fällt oder geworfen worden ist, während die Beschleunigung in beiden Fällen dieselbe und zwar konstant ist). Für denjenigen, der von der mathematischen Behandlung physikalischer an die chemischer Probleme kommt, ist es eine der auffallendsten Tatsachen, daß bei den letzteren bis jetzt sich keine Veranlassung gezeigt hat, die Beschleunigung einzuführen.

Wir können den Prozeß, der von der gegebenen Funktion zur ersten Ableitung und von dieser zur zweiten geführt hat, beliebig oft wiederholen; damit erhalten wir Differentialquotienten beliebig

hoher Ordnung. Sie haben keine so einfache geometrische und mechanische Bedeutung; aber sie dienen zur Ableitung von Formeln, denen auch für die Anwendungen der Analysis große Bedeutung zukommt.

§ 41. Der Satz von ROLLE und der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

ROLLE, ein Zeitgenosse von LEIBNIZ und NEWTON, hat sich Zeit seines Lebens gegen die Infinitesimalrechnung, den neuen Calcul, wie man damals sagte, ablehnend verhalten, weil er ihm nicht strenge genug begründet schien; es liegt daher eine gewisse Ironie der Geschichte darin, daß ein von ihm gefundener Satz jetzt gerade eines der Fundamente der Differentialrechnung bildet, namentlich wo es sich darum handelt, von ihr eine rein analytische Begründung ohne Zuhilfenahme geometrischer Vorstellungen zu geben.

Der Satz selbst lautet folgendermaßen:

Gibt es zwei Werte x_1, x_2, für welche eine Funktion $f(x)$ den Wert Null annimmt:

$$f(x_1) = 0, \qquad f(x_2) = 0,$$

so gibt es zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Wert von der Art, daß

$$f'(\xi) = 0 \tag{1}$$

ist, vorausgesetzt, daß f_1 und f_2 im Intervall von x_1 bis x_2 sich stetig ändern.

Auf einen arithmetisch durchgeführten Beweis dieses Satzes wollen wir verzichten und uns mit einer geometrischen Veranschaulichung an der Figur begnügen: Wenn $f(x)$ im ganzen Intervall von x_1 bis x_2 gleich Null ist, so ist auch $f'(x)$ in diesem ganzen Intervall gleich Null und der Satz ist selbstverständlich. Wenn aber $f(x)$ nicht im ganzen Intervall gleich Null ist,

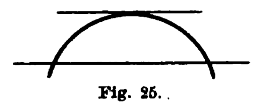


Fig. 25.

so sei es etwa zuerst positiv (der Fall, daß es zuerst negativ ist, läßt sich ebenso erledigen). Wenn es von 0 zu positiven Werten übergehen soll, so muß es wachsen, also muß $f'(x)$ zunächst positiv sein. Es kann aber nicht fortwährend positiv bleiben; denn dann würde $f(x)$ fortwährend wachsen und könnte nicht wieder zum Werte Null zurückkehren, was es doch nach Voraussetzung soll. Also muß $f'(x)$, nachdem es zuerst positiv war, einmal negativ

werden. Es sollte sich aber stetig (nicht sprungweise) ändern; *also kann es nicht von positiven zu negativen Werten übergehen, ohne durch Null hindurchzugehen.* Folglich muß es zwischen x_1 und x_2 mindestens einmal Null werden; w. z. b. w.

Man sieht, worauf es ankommen würde, wenn wir von dem ROLLEschen Satz einen von geometrischer Anschauung unabhängigen Beweis geben wollten; es würde sich darum handeln, die geometrische Vorstellung, die wir mit dem Worte „stetige Änderung" verbinden, so zu präzisieren, daß wir aus der damit gewonnenen Definition der „Stetigkeit" einen Beweis für die Richtigkeit des vorhin kursiv gedruckten Schlußsatzes ableiten könnten.

Von dem ROLLEschen Satz ist der sog. *„Mittelwertsatz der Differentialrechnung"* eine einfache Verallgemeinerung. Er sagt, geometrisch ausgedrückt, aus: *Auf einem stetigen Kurvenbogen mit stetig sich ändernder Tangente gibt es mindestens einen Punkt, in welchem die Tangente parallel ist zu der Sehne, die die Endpunkte des Bogens verbindet* (Fig. 26)

Um das analytisch zu formulieren, bezeichnen wir wie in § 11 den Winkel, den die Sehne mit der x-Achse einschließt mit α_{12}, den Winkel, den die Kurventangente mit der x-Achse einschließt, mit α. Wir haben dann:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(\xi);$$

der Mittelwertsatz sagt also aus: es gibt zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Punkt ξ von der Art, daß:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{2}$$

oder was dasselbe ist:

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

ist.

Was den Beweis des Mittelwertsatzes betrifft, so kann man ihn entweder daraus folgern, daß er in den ROLLEschen Satz übergeht, wenn man die Verbindungssehne der Endpunkte des Bogens zur x-Achse macht; oder analytisch, indem man den ROLLEschen Satz auf die Funktion

Fig. 26.

$$\varphi(x) = f(x) - f(x_1) - (x - x_1) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

anwendet, deren Ableitung nach x den Wert hat:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

da x_1, x_2 und also auch $f(x_1)$ und $f(x_2)$ bei der Differentiation als Konstante behandelt werden müssen.

Für die Mechanik sagt der Mittelwertsatz aus: die augenblickliche Geschwindigkeit kann nicht während eines ganzen Zeitraumes dauernd größer oder dauernd kleiner sein, als die mittlere Geschwindigkeit während dieses Zeitraums.

Über die in den Formeln vorkommende Zahl ξ kann man keine weiteren Angaben machen, solange über die Funktion $f(x)$ nichts weiter bekannt ist; man kann leicht Beispiele bilden, in denen sie sehr nahe bei x_1, oder sehr nahe bei x_2, oder an irgend einer vorgeschriebenen Stelle zwischen beiden Werten liegt. Nimmt man etwa

$$f(x) = x(x-3)(x-3c) = x^3 - 3(c+1)x^2 + 9cx$$

und $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, so sind die Voraussetzungen des ROLLEschen Satzes erfüllt; und die Gleichung $f'(x) = 0$ oder

$$x^2 - 2(c+1)x + 3c = 0$$

hat in der Tat für jeden Wert von c mindestens eine Wurzel, die zwischen 0 und 3 liegt; nämlich

$$c + 1 + \sqrt{(c+1)^2 - 3c}$$

hat diese Eigenschaft, wenn c zwischen $-\infty$ und 1 liegt,

$$c + 1 - \sqrt{(c+1)^2 - 3c},$$

wenn c zwischen 0 und $+\infty$ liegt. Diese letztere Wurzel liegt sehr nahe bei 0, wenn c sehr klein ist ; die erstere liegt sehr nahe bei 3, wenn c sehr nahe gleich 1 ist; die eine oder die andere liegt bei irgend einem zwischen 0 und 1 gelegenen Wert ξ, wenn

$$c = \frac{\xi^2 - 2\xi}{2\xi - 3}$$

genommen wird. Aber für viele Zwecke ist es, wie wir sehen werden, auch gar nicht nötig, ξ genauer zu kennen; es genügt zu wissen, daß eine solche Zahl unter den angegebenen Bedingungen jedesmal *existieren muß*. Wenn wir z. B. wissen, daß für alle Werte von ξ zwischen x_1 und x_2 eine Ungleichung der Form $m < f'(\xi) < M$ gilt, so können wir sofort schließen, daß auch

$$m(x_2 - x_1) < f(x_2) - f(x_1) < M(x_2 - x_1)$$

sein muß. Insbesondere, wenn in dem ganzen Intervall, von x_1 bis

x_2, das $f'(\xi)$ sich um weniger als ε von $f'(x_1)$ unterscheidet, können wir schließen, daß sich $f(x_2) - f(x_1)$ um weniger als $\varepsilon(x_2 - x_1)$ von $(x_2 - x_1)f'(x_1)$ unterscheidet. Ist einerseits das ε, andererseits die Differenz $x_2 - x_1$ so klein, daß wir ihr Produkt bei der verlangten Genauigkeit vernachlässigen können, so können wir schreiben:

$$f(x_2) - f(x_1) \sim (x_2 - x_1)f'(x_1); \tag{3}$$

wenn wir uns nämlich, wie schon in § 30, des Zeichens $\sim$ zur Bezeichnung einer näherungsweisen Gleichheit bedienen.

Da x_1 und x_2 in der näherungsweisen Gleichung (3) zwei ganz beliebige Werte von x bedeuten konnten, wenn nur die Stetigkeitsvoraussetzungen erfüllt waren, so können wir den Index 2 auch weglassen und x dann als veränderlich ansehen. Ersetzen wir noch den Index 1 durch 0, so lautet die Gleichung

$$f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0);$$

sie sagt dann aus: Soll die vorgelegte Funktion näherungsweise durch eine ganze Funktion ersten Grades

$$g(x) = Ax + B$$

(die vorgelegte Kurve näherungsweise durch eine gerade Linie) ersetzt werden, so kann das dadurch geschehen, daß man

$$A = f'(x_0), \quad B = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

nimmt. Die dadurch bestimmte ganze Funktion hat die Eigenschaft, daß die beiden Gleichungen

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0)$$

genau richtig sind.

§ 42. Die Maclaurinsche Formel.

Das letzte Ergebnis legt die Frage nahe: sei irgend eine Funktion $f(x)$ gegeben; können wir nicht eine rationale ganze Funktion $g(x)$ von der Art finden, daß für einen bestimmten Wert x_0 von x nicht nur $g(x)$ selbst und ihre erste Ableitung $g'(x)$, dieselben Werte haben wie $f(x)$, bzw. $f'(x)$, sondern daß auch noch für eine Anzahl höherer Ableitungen beider Funktionen solche Gleichheit stattfindet?

Wir wollen die Rechnung für eine rationale ganze Funktion vierten Grades durchführen und dabei zur Vereinfachung annehmen, der spezielle Wert x_0, für den die Übereinstimmung hergestellt

werden soll, sei der Wert 0 selbst. Setzen wir dann die zu bestimmende ganze Funktion mit zunächst noch unbestimmten Koeffizienten an:

$$g(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4, \tag{1}$$

so erhalten wir durch sukzessive Differentiationen:

$$\begin{aligned} g'(x) &= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3, \\ g''(x) &= \quad 2C + 6Dx + 12Ex^2, \\ g'''(x) &= \qquad 6D + 24Ex, \\ g^{\mathrm{IV}}(x) &= \qquad\quad 24E, \end{aligned}$$

also:

$$g(0) = A,\ g'(0) = B,\ g''(0) = 2C,\ g'''(0) = 6D,\ g^{\mathrm{IV}}(0) = 24E. \tag{2}$$

(Dabei ist z. B. unter $g''(0)$ derjenige Wert zu verstehen, den man erhält, wenn man erst die Funktion $g(x)$ zweimal nach x differentiiert und dann, nach Ausführung der Differentiationen, $x = 0$ setzt.) Sollen nun die Koeffizienten $A, B, \ldots$ so bestimmt werden, daß die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0),\ f''(0) = g''(0),\ f'''(0) = g'''(0), \\ f^{\mathrm{IV}}(0) = g^{\mathrm{IV}}(0), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

so sieht man sofort, daß man:

$$\left.\begin{aligned} A = f(0),\ B = f'(0),\ C = \frac{1}{1\cdot 2} f''(0),\ D = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0), \\ E = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(0) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

nehmen muß. Wir haben also auf die gestellte Frage folgende Antwort erhalten:

Diejenige rationale ganze Funktion vierten Grades, die bei $x = 0$ samt ihren vier ersten Ableitungen mit einer gegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt, ist:

$$g(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(0). \tag{5}$$

Was wir hier für eine ganze Funktion 4. Grades durchgeführt haben, läßt sich ebenso für eine ganze Funktion beliebigen Grades durchführen; soll Übereinstimmung der Werte der Ableitungen bis zur n^{ten} stattfinden, so müssen wir der Formel (5) noch weitere nach demselben Gesetze gebildete Glieder beifügen, deren letztes ist:

$$\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

(Das n, das die Anzahl der auszuführenden Differentiationen angibt, ist in Klammern gesetzt, damit es nicht mit einem Exponenten verwechselt wird.)

Sei z. B. vorgelegt:

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

so erhält man sukzessive:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}, \\ f''(x) &= +\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \\ f'''(x) &= -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \\ f^{\mathrm{IV}}(x) &= +\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(0) &= -1, \\ f''(0) &= +1\cdot 2, \\ f'''(0) &= -1\cdot 2\cdot 3, \\ f^{\mathrm{IV}}(0) &= +1\cdot 2\cdot 3\cdot 4; \end{aligned}$$

und wenn wir diese Werte in die allgemeine Formel einsetzen, so erhalten wir folgendes Resultat:

Die rationale ganze Funktion 4. Grades:

$$g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \tag{6}$$

stimmt bei $x = 0$ *nicht nur selbst mit der vorgelegten Funktion* $1/(1+x)$ *überein, sondern dasselbe gilt auch noch von ihren vier ersten Ableitungen und den entsprechenden Ableitungen der vorgelegten Funktion.*

Werden wir nun zu der Annahme berechtigt sein, daß auch noch für andere Werte von x als $x = 0$ zwischen der vorgelegten Funktion und der gefundenen rationalen ganzen Funktion Übereinstimmung bestehe? Im vorliegenden einfachen Fall können wir diese Frage durch direkte Rechnung beantworten. Wenn $g(x)$ genau $= 1/(1+x)$ wäre, müßte $g(x)\cdot(1+x) = 1$ sein; das ist aber nicht der Fall, sondern es ist, wie man durch Ausmultiplizieren findet:

$$(1+x)\,g(x) = 1 + x^5, \tag{7}$$

also:

$$\frac{1}{1+x} - g(x) = -\frac{x^5}{1+x}. \tag{8}$$

Die beiden zu vergleichenden Funktionen sind also tatsächlich nicht einander gleich, sondern sie unterscheiden sich um

$$-\frac{x^5}{1+x}$$

Wir werden daher dann und nur dann die eine für die andere setzen dürfen, wenn diese Differenz so klein ist, daß sie bei den gerade vorliegenden Anforderungen an die Genauigkeit vernachlässigt werden darf. Das wird der Fall sein, wenn x selbst klein ist; und zwar braucht es dazu keineswegs so klein zu sein, daß wir es selbst vernachlässigen dürften. Verlangen wir z. B. eine Genauigkeit von 4 Dezimalstellen, so dürfen wir x selbst nur vernachlässigen, wenn es kleiner als 0,0001 ist, x^2 aber schon, wenn $x < 0{,}01$ ist, endlich x^5 und um so mehr die erwähnte Differenz, wenn $x < 0{,}1$ ist. Wir können sagen:

Die Gleichung

$$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \tag{9}$$

ist streng richtig für $x = 0$ *und nur für diesen Wert; sie ist mit großer Annäherung richtig, wenn* x *sehr klein ist; sie ist mit roher Annäherung richtig, solange* x *merklich kleiner als* 1 *ist; und sie ist auch nicht einmal mehr in roher Annäherung richtig, wenn* x *nahezu gleich* 1 *oder gar größer als* 1 *ist.*

Z. B. ist $0{,}08^5 = 0{,}3$, dagegen $1{,}2^5 = 2{,}4$; der Fehler unserer Formel beträgt also für $x = 0{,}8$ nur $^3/_{10}$, für $x = 1{,}2$ aber schon fast das $2^1/_2$fache des richtigen Wertes.

Wir knüpfen hieran gleich eine allgemeine Bemerkung: Eine Gleichung der elementaren Algebra ist entweder nur für eine bestimmte endliche Anzahl von Werten der Variabeln richtig, oder dann gleich für alle möglichen Werte; wenn eine algebraische Gleichung für alle Werte von x, die kleiner als $^1/_{10}$ sind, richtig ist, so ist sie gleich für alle Werte von x richtig, für die ihre beiden Seiten überhaupt eine reelle Bedeutung haben. Aber wenn eine Gleichung für alle Werte von x in einem bestimmten Intervall, etwa für alle Werte von x, die kleiner sind als eine gewisse Grenze, *näherungsweise* richtig ist, so folgt daraus in keiner Weise, daß sie es auch außerhalb dieses Intervalls sein müßte.

Um noch an einem numerischen Beispiel zu sehen, wie die Sache sich bei unserer Gleichung (9) stellt, wenn wir dem x einen

nicht gar so kleinen Wert geben, nehmen wir etwa $x = 0{,}3$; wir erhalten dann:

$$\begin{array}{rl} 1 = & 1 \\ x^2 = & 0{,}09 \\ x^4 = & 0{,}0081 \\ \hline 1 + x^2 + x^4 = & 1{,}0981 \\ -x \; - x^3 = & -0{,}327 \\ \hline g(x) = & 0{,}7711 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x = 0{,}3 \\ x^3 = 0{,}027 \\ \hline x + x^3 = 0{,}327 \end{array}$$

Dagegen der richtige Wert ist:

$$\frac{1}{1{,}3} = 0{,}7692,$$

der Fehler der Näherungsformel beträgt also in diesem Falle 0,0019. In der Tat ist $x^5 = 0{,}00243$, also:

$$\frac{x^5}{1 + x} = 0{,}0019$$

wie vorher.

Wie haben wir uns nun diese Eigenschaften der MACLAURINschen Formel allgemein zurechtzulegen? Dazu stellen wir folgende Überlegungen an: wenn zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ für $x = 0$ übereinstimmen, so werden sie bei einigermaßen regelmäßigem Verlauf auch noch in der Nähe von $x = 0$ besser übereinstimmen, als zwei Funktionen, die schon für $x = 0$ verschiedene Werte annehmen. Natürlich wird dieser Schluß nur für kleine Werte von x richtig sein, denn weiterhin können sich ja die beiden ersten Kurven voneinander entfernen, die beiden letzteren einander nähern. Wenn die beiden Kurven ferner bei $x = 0$ noch eine gemeinsame Tangente haben, also gleiche Anfangsrichtung, so wird die Annäherung zwischen ihnen in der Nähe von $x = 0$ inniger sein, als wenn das nicht der Fall ist; sie werden dann auch in der nächsten Nähe, nach dem zuerst gezogenen Schlusse, wenig voneinander abweichen, und infolgedessen wird der Bereich, in dem ihre Abweichung voneinander gering ist, sich weiter erstrecken, als wenn sie bei $x = 0$ nur einen gemeinsamen Punkt mit verschiedenen Tangentenrichtungen haben — immer einigermaßen regelmäßigen Verlauf der beiden Kurven vorausgesetzt. Wenn ferner bei $x = 0$ auch die zweiten Ableitungen der beiden Funktionen übereinstimmen, so wird alles das, was im vorigen Fall von den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gesagt ist, von den Funktionen $f'(x)$ und $g'(x)$ gelten; und daraus wird dann wieder geschlossen werden können, daß die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ selbst in diesem Fall

auf einer größeren Strecke übereinstimmen als im vorigen. So kann man weiter argumentieren: je mehr Ableitungen bei $x = 0$ übereinstimmen, desto weiter kann man unter sonst gleichen Umständen auf eine Übereinstimmung der Funktionen selbst rechnen.

Man sieht ohne weiteres, daß diese Argumentation keinen mathematischen Beweis enthält: es kommt in ihr immer wieder die Ausdrucksweise „einigermaßen regelmäßiger Verlauf der Funktion" vor, die sich nicht in mathematische Begriffe fassen läßt. Man wird sich also nur da auf sie berufen dürfen, wo man von solchem regelmäßigen Verlauf der Erscheinungen aus naturwissenschaftlichen Gründen überzeugt sein darf. Auf die Frage nach einer genaueren mathematischen Formulierung der Gültigkeitsgrenzen der Gleichung werden wir erst später eingehen.

§ 43. Die TAYLORsche Formel.

Die MACLAURINsche Formel ersetzt eine gegebene Funktion durch eine rationale ganze Funktion, die mit ihren Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung bei $x = 0$ mit der gegebenen Funktion übereinstimmt. Wollen wir solche Übereinstimmung nicht für $x = 0$, sondern für irgend einen anderen Wert x_0 von x haben, so können wir das leicht erreichen, indem wir für $x - x_0$ eine neue Variable ξ einführen. Dadurch geht die vorgelegte Funktion $f(x)$ über in eine Funktion von ξ, die wir als solche mit $\varphi(\xi)$ bezeichnen wollen. Die Ableitung $f'(x)$ ist dann gleich dem Produkt aus der Ableitung von φ nach ξ, die wir mit $\varphi'(\xi)$ bezeichnen wollen, mit der von ξ nach x; da aber die letztere gleich 1 ist, so haben wir einfach:

$$\varphi'(\xi) = f'(x),$$

wo nur zu beachten ist, daß der Akzent rechts eine Differentiation nach x, links eine solche nach ξ anzeigt. Ebenso ist:

$$\varphi''(\xi) = f''(x)$$

u. s. w. Setzen wir dann $\xi = 0$, so hat das dieselbe Wirkung, wie wenn wir $x = x_0$ setzen; wir erhalten also aus der MACLAURINschen Formel für $\varphi(\xi)$ die TAYLORsche Formel für $f(x)$, nämlich:

$$f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1 \cdot 2} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0).$$

Aus ihr erhalten wir wieder die Formel von MACLAURIN für $f(x)$, indem wir $x_0 = 0$ setzen. (Daß man diese letztere, die sonach einen einfachen Spezialfall der ersteren bedeutet, mit einem eigenen Namen bezeichnet, würde eigentlich nur gerechtfertigt sein, wenn MACLAURIN *vor* TAYLOR tätig gewesen wäre, was nicht der Fall war.)

§ 44. Drei wichtige Spezialfälle der MACLAURINschen Formel.

Setzen wir in der MACLAURINschen Formel für $f(x)$ irgend eine bestimmte Funktion, so erhalten wir eine spezielle Formel. Von solchen mögen drei, die besonders häufig Anwendung finden, hier aufgeführt werden.

1) Setzen wir $f(x) = (1 + x)^m$, wo m eine beliebige (nicht nur eine positive ganze) Zahl bedeuten kann, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1}, \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}, \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(0) &= m, \\ f''(0) &= m(m-1), \\ f'''(0) &= m(m-1)(m-2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und damit die Binomialformel von NEWTON:

$$(1+x)^m \sim 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \cdots \quad (1)$$

2) Setzen wir $f(x) = e^x$, so werden alle Ableitungen der Funktion selbst gleich, ihre Werte für $x = 0$ werden alle gleich 1, und wir erhalten die Exponentialformel von NEWTON und JOHANN I. BERNOULLI:

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \quad (2)$$

3) Wollen wir eine entsprechende Formel für den natürlichen Logarithmus haben, so können wir nicht von $\log x$ selbst ausgehen,

da diese Funktion für $x = 0$ unendlich groß wird. Aber wir können etwa von $\log(1+x)$ ausgehen; dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log(1+x),\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x},\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2},\\
f'''(x) &= +\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\\
f^{IV}(x) &= -\frac{1\cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0,\\
f'(0) &= 1,\\
f''(0) &= -1,\\
f'''(0) &= +1\cdot 2,\\
f^{IV}(0) &= -1\cdot 2\cdot 3,\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und damit die Formel von N. MERCATOR:

$$\log(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - + \cdots \tag{3}$$

Mit Hilfe der Formel für die Exponentialfunktion können wir die Zahl e mit geringerer Mühe genau berechnen, als das auf Grund ihrer ursprünglichen Definition in § 32 möglich gewesen wäre. Wir brauchen dazu nur in der Formel (2) $x = 1$ zu setzen; die einzelnen Glieder der Formel lassen sich dann sehr bequem sukzessive auseinander berechnen, indem wir jedes Glied nur mit einem einfachen Faktor zu dividieren brauchen, um das nächste zu erhalten. Wollen wir das Resultat etwa auf 4 Dezimalstellen genau haben, so müssen wir die einzelnen Summanden auf 5 Stellen berechnen, da sonst zu befürchten wäre, daß sich die durch das Abbrechen entstehenden Fehler in der Summe zu sehr anhäufen würden. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
1 &= 1 \\
\frac{1}{2} &= 0{,}5 \\
\frac{1}{3!} &= 0{,}16667 \\
\frac{1}{4!} &= 0{,}04167 \\
\frac{1}{5!} &= 0{,}00833 \\
\frac{1}{6!} &= 0{,}00139 \\
\frac{1}{7!} &= 0{,}00020 \\
\frac{1}{8!} &= 0{,}00002 \\
\hline
e &= 2{,}7183
\end{aligned}$$

Mit einer geringeren Anzahl von Gliedern der Formel kommen wir aus, wenn wir etwa $x = \frac{1}{2}$ setzen und so erst $\sqrt{e}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
\frac{1}{2} &= 0{,}5 \\
\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 0{,}125 \\
\frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= 0{,}02083 \\
\frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 &= 0{,}00260 \\
\frac{1}{5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 &= 0{,}00026 \\
\frac{1}{6!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 &= 0{,}00002 \\
\hline
\sqrt{e} &= 1{,}6487;
\end{aligned}$$

wir haben dann freilich noch die Multiplikation dieser Zahl mit sich selbst auszuführen, um e zu erhalten.

Von MERCATOR's Formel (3) aus können wir zur Berechnung der natürlichen Logarithmen der Zahlen kommen. Die Formel selbst ist zur unmittelbaren Benutzung freilich nicht besonders geeignet, da wir zu viele Glieder brauchen würden, um einige Genauigkeit zu erreichen; aber wir können von ihr aus zu

praktischeren Formeln gelangen. Zu diesem Zweck ersetzen wir in ihr zunächst x durch $-x$, wodurch wir erhalten:

$$\log(1-x) \sim -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - - \cdots \tag{4}$$

Diese Formel verbinden wir dann mit der ursprünglichen durch Subtraktion; das gibt:

$$\log\frac{1+x}{1-x} \sim 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + + \cdots\right\}. \tag{5}$$

Wollen wir nun etwa $\log 2$ berechnen, so müssen wir x so wählen, daß

$$\frac{1+x}{1-x} = 2$$

wird; das ist der Fall für $x = \frac{1}{3}$. Wir erhalten dann:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333 \qquad\qquad \frac{1}{3} = 0{,}33333$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0{,}03704 \qquad\qquad \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0{,}01235$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0{,}00412 \qquad\qquad \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0{,}00082$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0{,}00046 \qquad\qquad \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0{,}00007$$

$$\overline{0{,}34657}$$

also

$$\log 2 = 0{,}6931,$$

wie in § 30.

Wollen wir dann noch die Logarithmen weiterer Zahlen berechnen, etwa eine ganze Logarithmentafel aufstellen, so werden wir die schon berechneten Werte soviel als möglich benutzen. Wir haben zunächst:

$$\log 3 = \log 2 + \log \tfrac{3}{2}.$$

Um

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{2}$$

zu bekommen, müssen wir $x = \frac{1}{5}$ nehmen; das gibt dann:

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad\qquad \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}008 \qquad\qquad \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}00267$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^5 = 0{,}00032 \qquad\qquad \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 0{,}00006$$

$$\overline{0{,}20273}$$

also $\log \frac{3}{2} = 0{,}4055$ und damit

$$\log 3 = 1{,}0986.$$

Um hierauf $\log 4$ zu berechnen, können wir entweder von der Gleichung:

$$\log 4 = 2 \log 2$$

oder von der Gleichung

$$\log 4 = \log 3 + \log \tfrac{4}{3}$$

Gebrauch machen; führen wir die Rechnung auf beide Arten aus, so werden wir eine erwünschte Kontrolle auch der vorhergehenden Rechnungen haben. U. s. w. Beim wirklichen Berechnen einer Logarithmentafel würde man übrigens die Arbeit durch mancherlei Kunstgriffe noch wesentlich abkürzen können.

Die Briggischen Logarithmen, die in den gewöhnlichen Logarithmentafeln stehen (vgl. § 31), werden dann aus den natürlichen durch Multiplikation mit dem dort angegebenen Faktor erhalten.

§ 45. Rechnen mit kleinen Größen.

Als *„klein"* sollen in diesem Paragraphen Größen dann bezeichnet werden, wenn man sie zwar nicht selbst vernachlässigen kann, aber doch ihre Quadrate und ihre Produkte zu je zweien, und auch noch die Produkte dieser Quadrate oder Produkte mit nicht zu großen Zahlenkoeffizienten (etwa bis 5 oder 6). Wie klein sie dazu sein müssen, das hängt von der im einzelnen Falle geforderten Genauigkeit ab; verlangt man etwa eine Genauigkeit von 3 geltenden Stellen, so wird man eine Größe als klein anzusehen haben, wenn sie höchstens gleich 0,02 ist.

Sind δ, ε, ζ solche kleine Größen, so gelten näherungsweise die folgenden Gleichungen, die sich z. T. durch direktes Ausmultiplizieren, z. T. aus den Formeln von § 44 ergeben:

$$(1 + \delta)(1 + \varepsilon) \sim 1 + \delta + \varepsilon, \tag{1}$$

$$(1 + \delta)(1 + \varepsilon)(1 + \zeta) \sim 1 + \delta + \varepsilon + \zeta, \tag{2}$$

$$(1 + \delta)^n \sim 1 + n\delta, \tag{3}$$

insbesondere

$$(1 + \delta)^{-1} \sim 1 - \delta, \tag{4}$$

$$(1 + \delta)^2 \sim 1 + 2\delta, \tag{5}$$

$$\sqrt{1+\delta} \sim 1 + \frac{\delta}{2}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} \sim 1 - \frac{\delta}{2}; \tag{7}$$

$$e^{\delta} \sim 1 + \delta; \tag{8}$$

$$\log(1+\delta) \sim \delta. \tag{9}$$

Von allen diesen Formeln hat man sehr häufig Gebrauch zu machen, wenn es sich bei der Berechnung von Versuchsergebnissen darum handelt, Nebenumstände, wie etwa die Änderungen der Temperatur oder des Barometerstandes oder der Intensität des Erdmagnetismus von einem Versuch zum andern zu berücksichtigen.

Die angeführten Formeln gelten, *„bis auf Glieder zweiter Ordnung ausschließlich genau"*, d. h. es sind in ihnen schon die Quadrate und Produkte der kleinen Größen zu je zweien vernachlässigt. Gelegentlich hat man auch mit Größen zu tun, die nicht so klein sind, daß man, bei den gerade vorliegenden Anforderungen an die Genauigkeit, schon ihre Produkte zu je zweien vernachlässigen könnte, aber doch ihre Produkte zu je dreien. Für solche Fälle bedarf man Formeln, die *„bis auf Glieder zweiter Ordnung einschließlich"* (bis auf Glieder dritter Ordnung ausschließlich) genau sind, z. B.

$$(1 + a\delta + b\delta^2)^2 \sim 1 + 2a\delta + (a^2 + 2b)\delta^2 \tag{10}$$

oder:

$$\frac{1+a\delta}{1+b\delta} \sim 1 + (a-b)\delta + (b^2 - ab)\delta^2. \tag{11}$$

Die letztere Formel wird gelegentlich auch in umgekehrter Richtung angewendet, indem sie auch dazu dienen kann, eine gegebene rationale ganze Funktion zweiten Grades durch eine gebrochene Funktion ersten Grades zu ersetzen. Soll das mit

$$1 + f\delta + g\delta^2$$

geschehen, so hat man a und b aus den Gleichungen

$$a - b = f$$

$$b(a-b) = g$$

zu bestimmen; man erhält dann

$$b = \frac{g}{f}, \quad a = \frac{f^2 - g}{f},$$

also

$$1 + f\delta + g\delta^2 \sim \frac{f + (f^2 - g)\delta}{f - g\delta}. \tag{12}$$

Durch Kombination der angegebenen Formeln kann man andere erhalten, die für kompliziertere Funktionen näherungsweise Ausdrücke ähnlicher Art geben, z. B.:

$$\frac{\sqrt{1 + a\delta}}{\sqrt[3]{1 + b\delta}} \sim \frac{1 + \frac{1}{2}a\delta}{1 + \frac{1}{3}b\delta} \sim 1 + \left(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}b\right)\delta. \qquad (13)$$

Man hat dabei nur auf die Möglichkeit zu achten, daß durch die Kombination die vernachlässigten Glieder größere Zahlenkoeffizienten bekommen, als sich mit ihrer Vernachlässigung verträgt, wird also, wenn man sicher gehen will, ein Glied mehr berechnen, als man nachher zu benutzen beabsichtigt. In der angewandten Mathematik tut man das freilich sehr häufig nicht; man muß sich aber dann dessen bewußt sein, daß man sich dabei nicht auf einen mathematischen, sondern auf einen naturwissenschaftlichen Schluß stützt.

§ 46. Näherungsweise Auflösung von Gleichungen.

Soll eine Gleichung mit numerischen Koeffizienten numerisch (in Zahlen) aufgelöst werden, so kann das bei Gleichungen höheren Grades nicht dadurch geschehen, daß man die Zahlwerte der Koeffizienten in eine allgemeine Auflösungsformel einsetzt. In vielen Fällen hat man keine solche allgemeine Formel; in andern ist die Formel, die man hat, zu numerischer Berechnung wenig geeignet. Unter solchen Umständen kann man sich durch Annäherungsmethoden helfen, die dem Wert der gesuchten Wurzel durch ein geregeltes Verfahren immer näher zu kommen erlauben. Man darf nicht meinen, daß ein solches Annäherungsverfahren etwas weniger mathematisches wäre als die allgemeine Formel, wie man sie etwa zur Auflösung der Gleichungen zweiten Grades hat: die Ausziehung einer Quadratwurzel, die von dieser verlangt wird, kann schließlich auch nur durch ein geregeltes Probieren geleistet werden, bei dem eine Dezimalstelle nach der andern bestimmt wird, und bei dem es auch wohl vorkommen kann, daß eine schon vorläufig bestimmte nachher noch um eine oder selbst um zwei Einheiten abgeändert werden muß. Ja im Grunde hat schon die Ausführung einer Subtraktion oder einer Division denselben Charakter.

Die meisten dieser Annäherungsverfahren setzen voraus, daß man schon einen genäherten Wert der Wurzel kennt, und geben nur eine Vorschrift, wie man aus einem solchen einen besseren ab-

leiten kann. In den Anwendungen der Analysis ist man meist aus der Natur des Problems in der Lage, Grenzen anzugeben, zwischen denen die gesuchte Wurzel notwendig liegen muß. Für algebraische Gleichungen wird in der Algebra eine Methode gelehrt, nach der man solche Grenzen in jedem Falle finden kann; für nicht algebraische Gleichungen — transzendente, wie man wohl sagt — kann es der Natur der Sache nach keine solche allgemeine Methode geben.

Die einfachste dieser Methoden besteht darin, daß man das Intervall, in dem die Wurzel liegen muß, durch Probieren ohne viel Studieren verkleinert. Es möge an einem Beispiel erläutert werden. Sei die Gleichung vorgelegt:

$$x^3 - 3x + 1 = 0. \qquad (1)$$

Wir betrachten ihre linke Seite als eine Funktion $y = f(x)$; die Aufgabe der Auflösung der Gleichung läßt sich dann auch so aussprechen: es soll ein Wert von x gefunden werden, für den der zugehörige Wert von y gleich Null ist; oder geometrisch: es soll von der Kurve, deren Gleichung in kartesischen Koordinaten $y = f(x)$ ist, ein Schnittpunkt mit der x-Achse gefunden werden.

Für $x_1 = 0$ ist $y_1 = 1$, also positiv, die Kurve befindet sich bei $x = 0$ über der x-Achse. Für $x_2 = 1$ ist $y_2 = -1$, also negativ; die Kurve befindet sich bei $x = 1$ unter der x-Achse. Aber sie ist stetig; sie kann also nach einem Satze, von dem wir schon öfter Gebrauch gemacht haben, nicht aus dem Gebiet oberhalb der Achse in das Gebiet unterhalb derselben herunterkommen, ohne sie zu schneiden. Es muß also zwischen $x = 0$ und $x = 1$ mindestens eine Wurzel der Gleichung liegen. Damit haben wir diese Wurzel auf eine Einheit genau bestimmt; das wird vielleicht für manche Zwecke schon genügen.

Genügt es uns nicht, so können wir das Intervall, in dem notwendig eine Wurzel liegen muß, durch den Versuch einengen: wir können irgend einen zwischen 0 und 1 gelegenen Wert von x darauf prüfen, ob er einen positiven oder einen negativen Wert von y liefert. Wenn wir keine besondere Veranlassung haben, einen andern Wert zu wählen, nehmen wir etwa $x_3 = \frac{1}{2}$; wir erhalten dann:

$$y_3 = f(3) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1 - 12 + 8}{8} = -\frac{3}{8}.$$

Das ist negativ; es muß also zwischen x_1 und x_3 noch mindestens eine Wurzel liegen. (Dagegen bleibt es hier dahingestellt, ob

zwischen x_2 und x_3 eine Wurzel liegt: man sieht nur soviel: es muß da entweder keine Wurzel liegen oder eine gerade Anzahl, etwaige mehrfache Wurzeln mehrfach gerechnet).

Damit ist das Intervall, in dem notwendig eine Wurzel liegen muß, auf die Hälfte verkleinert; durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man es sukzessive auf $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... des ursprünglichen Betrages herabdrücken und schließlich so klein machen, als man will; z. B. würden 10 solcher Schritte ausreichen, um es auf 0,001 herunterzubringen.

Gewöhnlich empfiehlt es sich, dieses Verfahren noch etwas zu modifizieren. Der Fehler im Wert von y, den wir begingen, als wir $x_1 = 0$ annahmen, betrug 1, der Fehler den wir begingen, als wir $x_3 = \frac{1}{2}$ nahmen, betrug nur $\frac{3}{8}$. Wir werden daher vermuten dürfen, daß der letztere Wert besser war als der erstere, daß die gesuchte Wurzel näher bei x_3 als bei x_1 liegt; und zwar ungefähr im Verhältnis der Fehler. Wir werden also vielleicht zweckmäßig als x_4 denjenigen Wert nehmen, der das Intervall zwischen x_1 und x_3 im Verhältnis dieser Fehler teilt; m. a. W. wir werden x_4 aus der Proportion

$$(x_3 - x_4) : (x_4 - x_1) = \tfrac{3}{8} : 1 \tag{2}$$

berechnen, die

$$x_4 = \tfrac{8}{11} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{11}$$

ergibt. Dieses Verfahren ist unter dem Namen der „Regel der zwei Wagschalen“ schon den arabischen Mathematikern bekannt gewesen; jetzt wird es gewöhnlich als „doppelter falscher Ansatz“ bezeichnet.

Für die weitere Rechnung empfiehlt es sich noch, den gefundenen Wert von x_4 in einen Dezimalbruch zu verwandeln; dabei würde es aber gar nicht am Platze sein, wenn wir viele Stellen dieses Dezimalbruches angeben wollten, da wir ja doch auf keinen Fall schon viele Stellen richtig haben und eine kleine Abweichung von dem richtigen Werte von x_4 für die weitere Rechnung ohne Einfluß ist. Es genügt vollständig, wenn wir

$$x_4 = 0{,}36$$

nehmen, was

$$y_4 = 0{,}047 - 1{,}08 + 1 = -\,0{,}033$$

ergibt, also schon einen beträchtlich kleineren Fehler, als die vorhergehenden Näherungswerte.

Wir könnten dann die beiden Werte

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0{,}36$$

und ihre Fehler

$$y_1 = 1, \quad y_4 = -0{,}033$$

abermals verbinden und die Regel des doppelten falschen Ansatzes von neuem anwenden. Mehr empfiehlt es sich, wenn man einmal so weit gekommen ist, ein von NEWTON angegebenes Verfahren anzuwenden. x_4 ist bereits ein Näherungswert für die Wurzel; bezeichnen wir diese mit $x_4 + \delta$, so ist δ eine kleine Größe, deren Quadrat und höhere Potenzen wir vernachlässigen können. Nach der TAYLORschen Formel, bzw. dem Mittelwertsatz ist also:

$$f(x_4 + \delta) \sim f(x_4) + \delta f'(x_4).$$

Soll nun δ so gewählt werden, daß $f(x_4 + \delta) = 0$ wird, so müssen wir

$$\delta \sim -\frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \tag{3}$$

nehmen; und das ist eben die von NEWTON angegebene Regel. Ihre geometrische Bedeutung ist leicht einzusehen: sie kommt (vgl. den Schluß von § 41) darauf hinaus, daß man, statt den Schnittpunkt der Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse zu suchen, den Schnittpunkt ihrer Tangente im Punkte x_4 mit der x-Achse bestimmt. Diese Art, die Sache aufzufassen, läßt auch sofort erkennen, daß das Verfahren unter Umständen irre führen kann: wenn auch die Ordinate der Kurve im Punkte x_4 sehr klein ist, und wenn auch dieser Punkt schon sehr nahe an einem Schnittpunkt der Kurve mit der Achse liegt, so ist es doch noch möglich, daß die Kurve bei x_4 noch ziemlich parallel mit der Achse verläuft und erst nachher umbiegt, so daß der Schnittpunkt der Tangente im Punkte x_4 weiter vom Schnittpunkt der Achse entfernt sein kann, als der Punkt x_4 selbst, und also der neue Näherungswert ev. nicht besser, sondern schlechter ausfällt, als der alte. Man wird also bei Anwendung dieses Verfahrens, wenn man sicher sein will, jeden neuen Näherungswert erst darauf hin prüfen müssen, ob er wirklich eine bessere Annäherung liefert.

In unserem Beispiel hatten wir:

$$x_4 = 0{,}36$$

gefunden und auch $f(x_4) = -0{,}033$ schon berechnet; dazu kommt jetzt, da

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \tag{4}$$

ist:

$$f'(x_4) = 0{,}39 - 3 = -2{,}61,$$

also

$$\delta = -\frac{0{,}033}{2{,}61} = -0{,}013$$

und damit:

$$x_5 = x_4 + \delta = 0{,}347\,.$$

Zur Probe berechnen wir:

$$y_5 = 0{,}04178 - 1{,}041 + 1 = 0{,}00078\,.$$

Der Fehler ist also in der Tat kleiner geworden, wenn auch noch nicht unmerklich klein. Wir wiederholen daher das Verfahren noch einmal; wir erhalten:

$$f'(x_5) = 0{,}361 - 3 = -2{,}639$$

$$\delta = \frac{0{,}00078}{2{,}639} = 0{,}0003$$

$$x_6 = x_5 + \delta = 0{,}3473\,.$$

Wollen wir noch weiter gehen, so mögen wir etwa Logarithmen benutzen; wir erhalten:

$$\begin{aligned} \log x_6 &= 0{,}54070 - 1 \\ 3\log x_6 &= 0{,}62210 - 2 \\ x_6^3 &= 0{,}041889 \\ 1 + x_6^3 &= 1{,}041889 \\ 3x_6 &= 1{,}0419 \\ \hline f(x_6) &= -0{,}000011 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\log x_6 &= 0{,}08140 - 1 \\ x_6^2 &= 0{,}1206 \\ 3x_6^2 &= 0{,}3618 \\ f'(x_6) = 3x_6^2 - 3 &= -2{,}6382 \end{aligned}$$

$$\delta = -\frac{0{,}000011}{2{,}6382} = -0{,}000005\,,$$

also

$$x_7 = x_6 + \delta = 0{,}347295\,.$$

Die letzte Stelle ist hier nicht sicher; wir könnten sie bei diesem Schritte sehr wohl richtig erhalten, müßten aber dann die Zwischenrechnungen mit mehrstelligen Logarithmen ausführen.

Wie das Beispiel zeigt, führt das Verfahren sehr rasch weiter, sobald man einmal über die ersten Schritte hinaus ist. Ohne Beweis sei angeführt: falls nicht ein Zusammentreffen besonders ungünstiger Umstände vorliegt, kann man darauf rechnen, wenn bei einem Schritt n geltende Stellen richtig bestimmt sind, beim nächsten $n-1$ weitere zu erhalten, so daß man also dann $2n-1$ richtige Stellen hat. Immerhin sind daneben noch die Fehler zu berücksichtigen, die durch das Abbrechen der Zwischenrechnungen herein-

kommen können. In dieser Hinsicht ist zu bemerken, daß man die einzelnen Glieder der Ausdrücke $f(x)$ nach den ersten Schritten sehr genau berechnen muß, weil sie sich größtenteils gegeneinander wegheben. Dagegen wird man sich bei Berechnung der Werte $f'(x)$ mit geringerer Genauigkeit begnügen können; in vielen Fällen ändert sich $f'(x)$ von einem Schritt zum andern überhaupt nicht mehr merklich. Nur der Fall ist auszunehmen, daß $f'(x)$ in der Nähe des gesuchten Wurzelpunktes auch sehr kleine Werte hat. In diesem Falle liegen die Verhältnisse für die Anwendung des Verfahrens überhaupt ungünstig, da dann der gesuchte Schnittpunkt der Tangente mit der Achse durch das bestimmt wird, was man beim Zeichnen einen schleifenden Schnitt nennt. In solchen Fällen ist mehr die wiederholte Anwendung des doppelten falschen Ansatzes zu empfehlen, der gerade hier gute Resultate liefert.

§ 47. Auflösung von Gleichungen durch sukzessive Approximation.

Wir schließen hier noch gleich ein anderes Verfahren zur Gleichungsauflösung an, das in vielen Fällen gute Dienste leistet. Um es vorzubereiten, bringen wir die Gleichung auf eine solche Form, daß auf der einen Seite x allein steht:

$$x = \varphi(x), \tag{1}$$

was noch auf sehr mannigfaltige Arten möglich ist. Dann gehen wir von irgend einem ganz beliebigen Wert x aus — praktisch wird man natürlich womöglich schon einen Näherungswert der gesuchten Wurzel nehmen — und berechnen der Reihe nach die Werte:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0), \\ x_2 &= \varphi(x_1), \\ x_3 &= \varphi(x_2), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

In sehr vielen Fällen erreicht man schon nach wenigen Schritten, daß x_{n-1} von x_n bei der verlangten Genauigkeit nicht zu unterscheiden ist; man hat also dann:

$$x_n = \varphi(x_n), \tag{3}$$

d. h. man hat einen Wert gefunden, der die gegebene Gleichung nahezu zu einer richtigen macht. Können wir daraus schließen, daß ein solcher Wert ein Näherungswert für eine Wurzel der Gleichung ist? Offenbar können wir das nicht in allen Fällen: die Kurve $y = f(x)$ könnte ja der x-Achse sehr nahe kommen, sie aber dann nicht überschreiten, sondern sich wieder von ihr wegwenden. Aber in einem Falle werden wir berechtigt sein diesen Schluß zu ziehen (vgl. die Schlußbemerkungen des letzten Paragraphen): wenn nämlich

$$f'(x) \equiv 1 - \varphi'(x) \tag{4}$$

in der Nähe des betrachteten Punktes nicht klein, also wenn $\varphi'(x)$ merklich kleiner als 1 ist.

Soll das Verfahren auf die im vorigen Abschnitt behandelte Gleichung angewendet werden, so mögen wir sie etwa auf die Form bringen:

$$x = \frac{x^3 + 1}{3}. \tag{5}$$

Dann ist $\varphi'(x) = x^2$, also jedenfalls merklich kleiner als 1, sobald x auch nur etwas kleiner als 1 ist. Wir können das Verfahren daher anwenden, wenn wir etwa von $x = \frac{2}{3}$ ausgehen; wir erhalten dann:

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{27} + 1\right) = \frac{35}{81} = 0{,}43;$$

weiter:

$$\begin{array}{r} 0{,}43 \cdot 0{,}43 \\ \hline 0{,}172 \\ 13 \\ \hline 0{,}185 \cdot 0{,}43 \\ \hline 74 \\ 5 \\ \hline x_1^3 = 0{,}079 \end{array}$$

(Es genügt vollständig, die Multiplikation nur auf zwei Stellen genau auszuführen). Damit kommt:

$$x_2 = \frac{1{,}079}{3} = 0{,}36.$$

Weiter rechnen wir zweckmäßiger Weise mit Logarithmen, ev. mit einer Rechenmaschine. Es kommt:

$$
\begin{array}{rll}
\log 0{,}36 = & 0{,}5563 & -1 \\
3\log 0{,}36 = & 0{,}6689 & -2 \\ \hline
1 + x_2^3 = & 1{,}0467 & \\
x_3 = & 0{,}349 & \\ \hline
\log x_3 = & 0{,}5428 & -1 \\
3\log x_3 = & 0{,}6284 & -2 \\ \hline
1 + x_3^3 = & 1{,}0425 & \\
x_4 = & 0{,}3475 & \\ \hline
\log x_4 = & 0{,}54095 & -1 \\
3\log x_4 = & 0{,}62285 & -2 \\ \hline
1 + x_4^3 = & 1{,}04196 & \\
x_5 = & 0{,}34732 & \\ \hline
\log x_5 = & 0{,}540726 & \\
3\log x_5 = & 0{,}622178 & \\ \hline
1 + x_5^3 = & 1{,}041897 & \\
x_6 = & 0{,}347299\,. &
\end{array}
$$

Hier darf die vorletzte Stelle als sichergestellt betrachtet werden; die letzte kann durch Rechnen mit fünfstelligen Logarithmen überhaupt nicht genau erhalten werden.

Man sieht schon aus diesem Beispiel, daß das Verfahren, wenn keine große Genauigkeit verlangt wird, rasch zu einem brauchbaren Näherungswert führt, von da aber viel weniger rasch konvergiert, als das NEWTONsche. Es wird also insbesondere dann anzuwenden sein, wenn man mit geringer Genauigkeit sich begnügen kann und will.

Vor dem NEWTONschen hat dieses Verfahren das voraus, daß es sich leicht auch auf Systeme von Gleichungen mit mehreren Unbekannten übertragen läßt. Insbesondere kommt es in Betracht, wenn man, was häufig der Fall ist, mit einem System linearer Gleichungen zu tun hat, bei dem in jeder der Gleichungen der Koeffizient einer Unbekannten die Koeffizienten aller übrigen merklich überwiegt, und zwar in jeder Gleichung der einer andern. Sei z. B. vorgelegt

$$
\begin{aligned}
7x + y &= 38 \\
x + 5y &= 20
\end{aligned}
$$

und benutzt man $x = 0$, $y = 0$ als erste Annäherung, so erhält man als zweite:

$$x = \frac{38}{7} = 5{,}4; \quad y = \frac{20}{5} = 4\,,$$

als dritte:

$$x = \frac{38 - 4}{7} = 4{,}86; \quad y = \frac{20 - 5{,}4}{5} = 2{,}92,$$

als vierte:

$$x = \frac{38 - 2{,}92}{7} = \frac{35{,}08}{7} = 5{,}01$$

$$y = \frac{20 - 4{,}86}{5} = \frac{15{,}14}{5} = 3{,}03,$$

endlich als fünfte:

$$x = \frac{38 - 3{,}03}{7} = \frac{34{,}97}{7} = 4{,}996$$

$$y = \frac{20 - 5{,}01}{5} = \frac{14{,}99}{5} = 2{,}998.$$

In der Tat sind die genauen Lösungen der Gleichungen $x = 5$, $y = 3$.

Im vorliegenden Falle führt das Verfahren, wie man sieht, nicht so schnell zum Ziele, als die direkte Auflösung der Gleichungen nach einer der gewöhnlichen Methoden. Aber wenn man mit einer größeren Anzahl von Gleichungen zu tun hat, ist es merklich kürzer.

§ 48. Division von Näherungsformeln.

Wenn eine Funktion y von x bis auf Glieder bestimmter Ordnung genau durch eine rationale ganze Funktion dargestellt ist, deren von x freies Glied von Null verschieden ist, so können wir auch $1/y$ bis auf Glieder derselben Ordnung genau durch eine solche Funktion darstellen.

Wenn wir mit dem von x freien Glied, das ja von Null verschieden sein sollte, erst dividieren, können wir erreichen, daß dieses Glied sich auf 1 reduziert; wir dürfen also unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß es gleich 1 sei. Sei etwa bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich genau:

$$y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + (x^5), \tag{1}$$

so können wir die rechte Seite gleich $1 + z$ setzen, wo dann

$$z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + (x^5).$$

Auf Grund der Formel (1) von § 44 erhalten wir dann zunächst:

$$\frac{1}{y} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + (z^5):$$

ferner aber, am bequemsten der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
-z &= -\alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4 + (x^5),\\
z^2 &= \qquad \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x^3 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)\, x^4 + (x^5),\\
-z^3 &= \qquad\qquad -\alpha^3 x^3 - 3\alpha^2\beta x^4 + (x^5),\\
z^4 &= \qquad\qquad\qquad \alpha^4 x^4 + (x^5),\\
(z^5) &= \qquad\qquad\qquad (x^5);
\end{aligned}$$

also wenn wir schließlich alles einsetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} = 1 - \alpha x + (\alpha^2 - \beta)\, x^2 + (-\alpha^3 + 2\alpha\beta - \gamma)\, x^3 \\
+ (\alpha^4 - 3\alpha^2\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma - \delta)\, x^4 + (x^5);
\end{aligned}$$

womit die gewünschte Darstellung erreicht ist.

Wenn wir uns so davon überzeugt haben, daß die Lösung der Aufgabe möglich ist, können wir die wirkliche Berechnung noch auf eine andere Art ausführen. Wir können nämlich zuerst mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen:

$$\frac{1}{y} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + (x^5),$$

und dann die Koeffizienten daraus bestimmen, daß das Produkt aus diesem Ausdruck und dem gegebenen von y bis auf Glieder vierter Ordnung einschließlich genau mit 1 übereinstimmen muß. Das gibt:

$$\begin{aligned}
1 = 1 + (A + \alpha)\, x + (B + A\alpha + \beta)\, x^2 + (C + B\alpha + A\beta + \gamma)\, x^3 \\
+ (D + C\alpha + B\beta + A\gamma + \delta)\, x^4 + (x^5),
\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}
&A + \alpha = 0\\
&B + A\alpha + \beta = 0\\
&C + B\alpha + A\beta + \gamma = 0\\
&D + C\alpha + B\beta + A\gamma + \delta = 0.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen liefert sofort $A = -\alpha$, die zweite dann

$$B = -A\alpha - \beta = \alpha^2 - \beta$$

u.s.w.

Wir wollen dieses Verfahren dazu benutzen, um die Entwicklung von e^{-x} aus der von e^x abzuleiten. Wir erhalten:

$$1 \sim \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4),$$

also:

$$A + 1 = 0,$$
$$B + A + \frac{1}{2} = 0,$$
$$C + B + \frac{1}{2} A + \frac{1}{6} = 0,$$
$$D + C + \frac{1}{2} B + \frac{1}{6} A + \frac{1}{24} = 0,$$

woraus der Reihe nach:

$$A = -1, \quad B = -A - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad C = -B - \frac{1}{2} A - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$
$$D = -C - \frac{1}{2} B - \frac{1}{6} A - \frac{1}{24} = \frac{1}{24},$$

und damit:

$$e^{-x} \sim 1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4,$$

wie es sein muß.

§ 49. Umkehrung von Näherungsformeln.

Es sei y als Funktion von x näherungsweise durch eine rationale ganze Funktion dargestellt, in der kein von x freies Glied vorkommt, wohl aber ein Glied mit der ersten Potenz von x. Dann kann auch umgekehrt x näherungsweise durch eine rationale ganze Funktion von y dargestellt werden. Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir dabei annehmen, der Koeffizient der ersten Potenz von x im Ausdruck von y sei gleich 1; denn wenn das nicht von Anfang an der Fall sein sollte, so können wir es immer dadurch erreichen, daß wir ein geeignetes Vielfaches von y oder von x an Stelle der ursprünglichen als neue Variable einführen. Dann sind für hinlänglich kleine x und y beide von derselben Größenordnung; wenn wir also eine bestimmte Potenz von x vernachlässigen, so werden wir konsequenter Weise auch die entsprechende Potenz von y zu vernachlässigen haben. Unter diesen Umständen können wir uns der Methode der unbestimmten Koeffizienten bedienen. Sei etwa gegeben:

$$y = x + \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4 + (x^5), \tag{1}$$

so setzen wir an:

$$x = y + A y^2 + B y^3 + C y^4 + (y^5). \tag{2}$$

Das gibt:

$$x^2 = y^2 + 2Ay^3 + (A^2 + 2B)y^4 + (y^5),$$
$$x^3 = y^3 + 3Ay^4 + (y^5),$$
$$x^4 = y^4 + (y^5),$$
$$(x^5) = (y^5);$$

also:

$$y = y + (A + \alpha)y^2 + (B + 2\alpha A + \beta)y^3$$
$$+ (C + \alpha(A^2 + 2B) + 3\beta A + \gamma)y^4 + (y^5).$$

Soll diese Gleichung bestehen, so muß sein:

$$A + \alpha = 0, \quad B + 2\alpha A + \beta = 0, \quad C + \alpha(A^2 + 2B) + 3\beta A + \gamma = 0,$$

d. h.

$$A = -\alpha, \quad B = 2\alpha^2 - \beta, \quad C = -5\alpha^3 + 5\alpha\beta - \gamma$$

und die gesuchte Formel wird:

$$x = y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta)y^3 - (5\alpha^3 - 5\alpha\beta + \gamma)y^4 + (y^5).$$

Wir hätten auch umgekehrt Ausdrücke für die verschiedenen Potenzen von y durch rationale ganze Funktionen von x aus (1) ableiten und diese in (2) einsetzen können.

Für die Rechnung noch bequemer ist meist ein anderes Verfahren, das an demselben Beispiel gezeigt werden soll. In erster Annäherung können wir x^2 ganz vernachlässigen; das gibt:

$$x \sim y. \tag{3}$$

Eine zweite Annäherung erhalten wir, wenn wir die kleine Größe x^2 nicht ganz vernachlässigen, aber in ihr x durch seinen ersten Näherungswert (3) ersetzen und x^3 ganz vernachlässigen; das gibt:

$$x \sim y - \alpha y^2.$$

Eine dritte Annäherung wird dann erhalten, wenn wir in x^2 die zweite, in x^3 die erste Annäherung benutzen; nämlich:

$$x \sim y - \alpha(y - \alpha y^2)^2 - \beta y^3 \sim y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta)y^3.$$

So können wir schrittweise fortfahren; der nächste Schritt liefert:

$$x \sim y - \alpha(y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta)y^3)^2 - \beta(y - \alpha y^2)^3 - \gamma y^4$$
$$\sim y - \alpha y^2 + (2\alpha^2 - \beta)y^3 - (5\alpha^3 - 5\alpha\beta + \gamma)y^4,$$

wie oben. Man sieht, daß das Verfahren sehr bequem ist, wenn man nur wenige Glieder braucht; bei jedem folgenden Schritt wird es allerdings mühsamer.

In derselben Weise kann man übrigens auch vorgehen, wenn zwischen x und y eine Gleichung der Form gegeben ist:

$$0 = x + ay + bx^2 + cxy + dy^2 + ex^3 + \dots,$$

die kein von x und y freies Glied, wohl aber ein solches mit der ersten Potenz von x, ohne y enthält.

§ 50. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz und das Restglied der Maclaurinschen Formel.

In den letzten Paragraphen haben wir uns wenig darum gekümmert, wie groß der Fehler etwa sein mag, den wir bei Benutzung einer unserer Näherungsformeln begehen. Eine Abschätzung dieses Fehlers, d. h. die Angabe einer Größe, die er zuverlässig nicht übersteigt, wäre auch für die meisten Anwendungen der Analysis im höchsten Maße erwünscht; aber sie ist oft nur schwierig zu erlangen. Wir wollen uns daher damit begnügen, daß wir zeigen, wie wenigstens in einigen einfachen Fällen eine solche Fehlerabschätzung wirklich erreicht werden kann. Zu diesem Zweck müssen wir zuerst eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes ableiten. Diese bezieht sich auf *zwei Funktionen* $F(x)$, $G(x)$, *die beide für* $x = 0$ *den Wert Null annehmen und im Intervall von* $x = 0$ *bis* $x = a$ *mit ihren ersten Ableitungen stetig sind.* Bilden wir aus ihnen die Funktion:

$$H(x) = F(x)\,G(a) - F(a)\,G(x), \tag{1}$$

so ist nicht nur $H(0) = 0$, sondern auch $H(a) = 0$; es gibt also nach dem Mittelwertsatze zwischen 0 und a mindestens einen Wert b, für den $H'(b) = 0$, d. h.

$$F'(b)\,G(a) - F(a)\,G'(b) = 0$$

oder

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F'(b)}{G'(b)} \tag{2}$$

ist. Wir können uns dieses Resultat auch leicht geometrisch veranschaulichen; es sagt nämlich aus: wenn die beiden Kurven $y = G(a)\,F(x)$ und $y = F(a)\,G(x)$ sich bei $x = 0$ und bei $x = a$ schneiden, so kann dazwischen nicht die eine fortwährend steiler sein, als die andere, sondern es muß zwischen 0 und a mindestens eine Stelle b geben, an der sie beide gleich steil sind.

Wenn die Funktionen F', G' auch noch für $x = 0$ beide den Wert Null haben und wenn überdies F'' und G'' zwischen 0 und a,

also speziell auch zwischen 0 und b stetig sich ändern, können wir den abgeleiteten Satz auch auf F' und G' anwenden. Wir finden: es gibt zwischen 0 und b mindestens einen Wert c von der Beschaffenheit, daß

$$\frac{F'(b)}{G'(b)} = \frac{F''(c)}{G''(c)} \tag{3}$$

ist. Verbinden wir dieses Resultat mit dem vorher abgeleiteten, und berücksichtigen wir dabei, daß ein zwischen 0 und b gelegener Wert notwendig zwischen 0 und a liegen muß, so erhalten wir den weiteren Satz:

Wenn die Funktionen $F(x)$, $G(x)$ im Intervall von 0 bis a mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind; wenn überdies nicht nur $F(0) = 0$, $G(0) = 0$, sondern auch $F'(0) = 0$ und $G'(0) = 0$ ist, so gibt es zwischen 0 und a mindestens einen Wert c, für den

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F''(c)}{G''(c)} \tag{4}$$

ist.

Sind auch noch weitere Ableitungen der beiden Funktionen F, G für $x = 0$ gleich 0, so kann man denselben Schluß wiederholt anwenden; man gelangt so zu folgendem allgemeinen Satze:

Sind die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = a$ mit ihren Ableitungen bis zur $(n+1)^{ten}$ Ordnung einschließlich stetig; sind ferner nicht nur F und G selbst, sondern auch ihre Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung bei $x = 0$ Null, so gibt es zwischen $x = 0$ und $x = a$ mindestens einen Wert ξ von der Art, daß:

$$\frac{F(a)}{G(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \tag{5}$$

ist.

Aus diesem allgemeinen Satze erhalten wir einen speziellen, wenn wir für $G(x)$ die Funktion x^{n+1} nehmen, die alle Voraussetzungen erfüllt und für die außerdem

$$G^{(n+1)}(\xi) = (n+1)! \tag{6}$$

ist, wo auch ξ liegen mag; es ergibt sich nämlich dann:

Ist die Funktion $F(x)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = a$ mit ihren Ableitungen bis zur $(n+1)^{ten}$ Ordnung einschließlich stetig; ist ferner bei $x = 0$ nicht nur $F(0)$ gleich 0, sondern auch alle Ableitungen von $F(x)$ bis zur n^{ten} Ordnung einschließlich, so gibt es zwischen 0 und a mindestens einen Wert ξ von der Art, daß

$$F(a) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\xi) \tag{7}$$

ist.

Diesen Satz können wir anwenden auf die Differenz

$$F(x) = f(x) - g(x) \tag{8}$$

zwischen einer Funktion $f(x)$ und der Summe der ersten Glieder ihrer MACLAURINschen Entwicklung, die mit $g(x)$ bezeichnet sei. Denn diese Differenz erfüllt die Stetigkeitsvoraussetzungen, wenn $f(x)$ sie erfüllt; außerdem ist nach den Ergebnissen von § 43

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0), \ldots, \quad f^{(n+1)}(0) = g^{(n+1)}(0)$$

und folglich

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \ldots, F^{(n)}(0) = 0.$$

Endlich ist:

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

da alle Glieder von $g(x)$ bei $(n+1)$maliger Differentiation wegfallen. Somit ergibt sich, wenn wir für a wieder x schreiben:

Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall von $x = 0$ bis x zu einem bestimmten Werte x mit ihren Ableitungen bis zur $(n+1)$ten stetig ist, so gibt es zwischen 0 und x mindestens einen Wert ξ für den die Gleichung

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi)$$

genau richtig ist.

Damit haben wir in der Tat die gewünschte Möglichkeit, den Fehler abzuschätzen, den wir begehen, wenn wir eine Funktion durch ihre MACLAURINsche Entwicklung bis zum Gliede mit x^n einschließlich ersetzen: er ist höchstens gleich dem Produkt von

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

und dem größten Wert, den die $(n+1)$te Ableitung zwischen 0 und x annimmt.

§ 51. Anwendung auf die Beispiele von § 44.

Für die binomische Entwicklung von $(1+x)^m$ erhalten wir, wenn wir von der Bezeichnung

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \tag{1}$$

Gebrauch machen:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \binom{m}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{m-n-1}. \tag{2}$$

Für die Exponentialreihe wird:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^{\xi}. \tag{3}$$

Endlich für die logarithmische Reihe:

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = \pm \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{(1+\xi)^n}. \tag{4}$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann man sich davon überzeugen, daß die in den Rechnungen von § 44 weggelassenen Glieder in der Tat auf die mitgenommenen Dezimalstellen keinen Einfluß haben.

Daran knüpft sich nun aber noch eine weitere Frage: Können wir dadurch, daß wir n hinlänglich groß nehmen, den Fehler unter jede Grenze herabdrücken, oder nicht?

Diese Frage ist mit Hilfe der abgeleiteten Formel für die Exponentialreihe ohne Schwierigkeit zu beantworten: wie groß auch x genommen sein mag, wir können n immer so groß nehmen, daß

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

so klein wird, als von uns verlangt wird. Denn sei g die größte in x enthaltene ganze Zahl, so hat in der Faktorenzerlegung

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^g}{g!} \cdot \left(\frac{x}{g+1} \cdot \frac{x}{g+2} \cdot \cdots\cdots \frac{x}{n+1}\right) \tag{5}$$

der erste Bestandteil einen von n unabhängigen festen Wert, von den folgenden Faktoren ist jeder kleiner als der vorhergehende, ihr Produkt also kleiner als die entsprechende Potenz des ersten unter ihnen; und da dieser kleiner als Eins ist, können wir zu jeder vorgeschriebenen Genauigkeitsgrenze ε die Zahl n so groß nehmen, daß nicht nur das Produkt dieser Faktoren, sondern auch ihr Produkt mit den übrigen, von n nicht abhängigen Faktoren kleiner als ε wird. Natürlich werden wir zu diesem Zwecke bei gegebenem x das n um so größer nehmen müssen, je größer x ist; aber möglich ist die Bestimmung eines solchen n für jedes x.

Weniger einfach ist die entsprechende Untersuchung für die beiden anderen Formeln von § 44 zu führen; ohne Beweis sei erwähnt, daß bei ihnen der Fehler zwar jedenfalls für solche x, die selbst kleiner als 1 sind, durch geeignete Annahme von n unter jede vorgeschriebene Grenze herabgedrückt werden kann,

aber sicher nicht für solche, die selbst größer als 1 sind; während für $x = 1$ und für $x = -1$ die Entscheidung über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer solchen Bestimmung des n noch von dem Werte von m abhängt.

§ 52. Maxima und Minima. Einfachste Fälle.

Schon früher haben wir gesehen, daß bei unseren Annahmen über die Wahl der Koordinatenachsen — x-Achse positiv nach rechts, y-Achse positiv nach oben — die Kurve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, überall da von links nach rechts steigt, wo $f'(x)$ positiv ist, dagegen überall da von links nach rechts fällt, wo $f'(x)$ negativ ist. Wir wollen nun unser Augenmerk auf diejenigen Punkte richten, in welchen die Kurve vom Steigen ins Fallen oder vom Fallen ins Steigen übergeht, oder was dasselbe ist, auf diejenigen Punkte, in welchen die Funktion vom Zunehmen ins Abnehmen, bzw. vom Abnehmen ins Zunehmen übergeht; die ersteren bezeichnen wir als *Maxima*, die letzteren als *Minima* der Funktion oder der Kurve. *Ein Maximum ist also ein Funktionswert, der größer ist, als die benachbarten Funktionswerte, ein Minimum ein Wert, der kleiner ist als die benachbarten.*

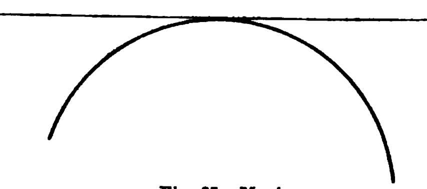


Fig. 27. Maximum.

Aus dem eben angeführten Satze folgt nun zunächst, daß ein Maximum oder Minimum sicher da nicht vorhanden sein kann, wo $f'(x)$ positiv oder negativ ist; anders ausgedrückt:

1. Ein Maximum oder Minimum kann, solange $f'(x)$ endlich ist, nur für einen solchen Wert x_0 von x eintreten, für welchen

$$f'(x_0) = 0 \tag{1}$$

ist.

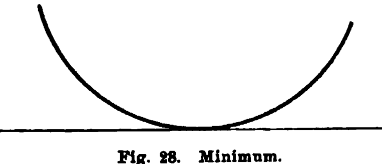


Fig. 28. Minimum.

Aber nicht jeder solche Punkt gibt wirklich ein Maximum oder Minimum. Soll etwa ein Maximum eintreten, so genügt es nicht, daß $f'(x)$ an der betrachteten Stelle Null ist; es ist dazu erforderlich,

daß es vorher positiv, nachher negativ ist. Wenn es aber von positiven Werten durch Null hindurch zu negativen Werten übergehen soll, so muß es im Abnehmen begriffen sein; und es ist sicher im Abnehmen begriffen, wenn sein Differentialquotient negativ ist. Sein Differentialquotient ist aber der zweite Differentialquotient der vorgelegten Funktion $f(x)$. Also haben wir das Resultat:

2. Wenn für einen Wert x_0 von x gleichzeitig

$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) < 0 \tag{2}$$

ist, so findet für diesen Wert ein Maximum der Funktion $f(x)$ statt.

Ist andererseits an der betrachteten Stelle die zweite Ableitung positiv, so ist die erste im Zunehmen begriffen; wenn sie augenblicklich Null und im Zunehmen begriffen ist, so muß sie vorher negativ gewesen sein und nachher positiv werden; dann war also die Funktion $f(x)$ selbst vorher im Abnehmen begriffen und nimmt nachher wieder zu. Das ist aber gerade das charakteristische für ein Minimum; also haben wir:

3. Wenn für einen Wert x_0 von x gleichzeitig

$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) > 0 \tag{3}$$

ist, so findet für diesen Wert ein Minimum der Funktion $f(x)$ statt.

Wenn wir also die Maxima und Minima einer vorgelegten Funktion $f(x)$ zu kennen wünschen, so werden wir zuerst die Gleichung (1) nach x_0 auflösen und für jede Wurzel x_0 dieser Gleichung das Vorzeichen des zugehörigen Wertes von $f''(x_0)$ bestimmen; diejenigen Werte, für die dieses Vorzeichen negativ ist, geben Maxima, diejenigen, für welche es positiv ist, geben Minima.

Ein einfaches Beispiel bietet die Aufgabe der Bestimmung der Maxima und Minima der Funktion

$$f(x) = x(a - x) = ax - x^2. \tag{4}$$

Hier ist $f'(x) = a - 2x$; wir erhalten also $f'(x_0) = 0$, wenn wir $x_0 = \frac{a}{2}$ nehmen. Weiter erhalten wir:

$$f''(x) = -2;$$

das ist für alle Werte von x, also auch für $x = \frac{a}{2}$, negativ; und dieser Wert liefert also ein Maximum der Funktion $f(x)$. Der Wert dieses Maximums ist $f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$.

Von der Frage nach den Maxima und Minima einer Funktion ist die Frage nach dem größten oder dem kleinsten Wert, den eine Funktion überhaupt annehmen kann, wohl zu unterscheiden. Ist die Funktion für alle Werte von x definiert und hat sie überall stetige Ableitungen, so läßt sich allerdings die letztere Frage auf die erstere zurückführen. Denn ein Wert, der größer sein soll, als alle übrigen Funktionswerte, muß jedenfalls auch größer sein, als die ihm benachbarten; der größte überhaupt vorhandene Funktionswert ist also unter den Maximalwerten der Funktion zu suchen, und wir haben nur diese, wenn ihrer mehrere sein sollten, daraufhin zu prüfen, welcher von ihnen der größte ist. Entsprechendes gilt für den kleinsten Funktionswert.

Anders liegt die Sache, wenn die Funktion, um die es sich handelt, nicht für alle Werte von x definiert ist, oder wenn die unabhängige Variable x durch ihre geometrische oder physikalische Bedeutung auf ein bestimmtes Intervall eingeschränkt ist. Für die Enden eines solchen Intervalls gelten nämlich die bisherigen Schlüsse nicht; ein solcher Endwert kann der größte Wert sein, auch wenn er z. B. nur größer ist als die ihm links benachbarten Werte, wenn nämlich die rechts benachbarten überhaupt nicht in Betracht kommen. Man könnte auch für diesen Fall allgemeine Regeln geben; einfacher ist es, in jedem Falle die Anfangswerte und Endwerte daraufhin zu prüfen, ob sie größer, als die dem Innern des Intervalls angehörenden Maximalwerte, bzw. kleiner als die inneren Minimalwerte ausfallen.

Soll z. B. die Aufgabe behandelt werden, ein Rechteck von gegebenem Umfange $2a$ und möglichst großem Inhalt zu konstruieren, so werden wir etwa die eine Seite des Rechtecks als unabhängige Variable x wählen; die andere ist dann $a - x$ und der Inhalt, der zu einem Maximum gemacht werden soll

$$f(x) = x(a - x), \tag{5}$$

also die vorhin diskutierte Funktion. Die geometrisch zulässigen Werte von x sind hier auf das Intervall $(0 \ldots a)$ beschränkt; an beiden Enden dieses Intervalls hat die Funktion den Wert 0, also einen kleineren Wert als für das im Innern des Intervalls gelegene, vorhin gefundene Maximum. Dieses Maximum gibt also hier wirklich den größten Wert, den der Inhalt des Rechtecks zu erreichen imstande ist.

Da hier aus geometrischen Überlegungen hervorgeht, daß ein Maximum vorhanden sein *muß*, und da wir andererseits nur einen einzigen Wert gefunden haben, für den ein Maximum eintreten *kann*, so hätten wir in diesem Falle auf die Diskussion des Vorzeichens der zweiten Ableitung auch verzichten können.

Haben wir das Resultat einmal gefunden, so können wir seine Richtigkeit auch ohne Differentialrechnung bestätigen. Denn es ist:

$$\frac{a^2}{4} - (ax - x^2) = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2,$$

also für jedes von $\frac{a}{2}$ verschiedene x positiv.

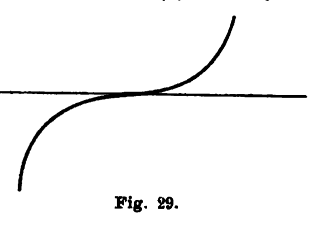
§ 53. Exzeptionelle Fälle.

Durch die Untersuchungen des vorigen Paragraphen ist der Fall noch nicht erledigt, daß für einen und denselben Wert x_0 von x zugleich

$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) = 0 \tag{1}$$

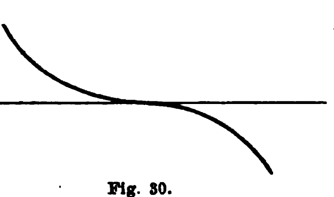
wird. In diesem Fall müssen wir einen Schritt weiter gehen und $f'''(x)$ bilden. Wir haben dann folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. Ist $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, so ist $f''(x)$ bei x_0 im Zunehmen begriffen; da es im Augenblick Null ist, so war es vorher negativ und wird nachher positiv; also war $f'(x)$ vorher im Abnehmen begriffen und nimmt nachher wieder zu; da es im Augenblick Null ist, so war es vorher positiv und wird nachher wieder positiv; also war $f(x)$ vorher im Zunehmen begriffen und nimmt nachher weiter zu; also hat $f(x)$ in diesem Falle bei x_0 *weder ein Maximum noch ein Minimum.*


Fig. 29.

2. Ganz in derselben Weise erkennt man, daß auch weder ein Maximum noch ein Minimum vorliegt, wenn die drei Bedingungen

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) < 0$$


Fig. 30.

gleichzeitig erfüllt sind; man hat nur in der vorhergehenden Überlegung die Worte Zunehmen und Abnehmen, positiv und negativ überall miteinander zu vertauschen.

3. Wenn aber für einen und denselben Wert x_0 von x die drei Bedingungen

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) = 0$$

erfüllt sind, so muß man abermals einen Schritt weitergehen und $f^{IV}(x_0)$ bilden. Man hat dann folgende Unterfälle zu unterscheiden:

3a. Ist neben den Bedingungen (3) noch

$$f^{IV}(x_0) > 0,$$

so ist $f'''(x)$ bei x_0 im Zunehmen begriffen, also vorher negativ, nachher positiv. Also ist $f''(x)$ vorher im Abnehmen begriffen und nimmt nachher wieder zu. Also ist $f''(x)$ vorher und nachher positiv. Also nimmt $f'(x)$ vorher und nachher zu. Also ist $f'(x)$ vorher negativ, nachher positiv. Also nimmt $f(x)$ vorher ab und nachher wieder zu. Also hat $f(x)$ bei x_0 ein *Minimum.*

3b. Ebenso wird gezeigt: wenn neben den Bedingungen (3) noch

$$f^{IV}(x_0) < 0$$

ist, so hat die Funktion $f(x)$ bei x_0 ein *Maximum.*

3c. Wenn aber die vier Bedingungen

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) = 0, \quad f^{IV}(x_0) = 0$$

gleichzeitig erfüllt sind, so muß man abermals einen Schritt weiter gehen und $f^{V}(x)$ untersuchen. Und so weiter. Man erkennt, daß man bei jedem weiteren Schritt eine Reihe von Fällen entscheiden kann, die vorher unentschieden geblieben waren, daß aber doch bei jedem Schritte noch Fälle übrig bleiben, die ein abermaliges Weitergehen erfordern.

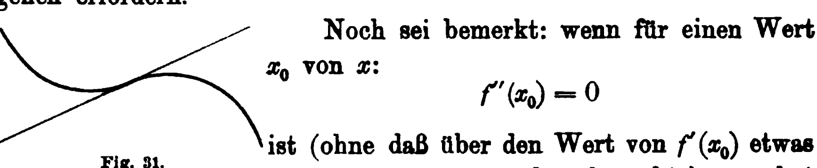


Fig. 31.

Noch sei bemerkt: wenn für einen Wert x_0 von x:

$$f''(x_0) = 0$$

ist (ohne daß über den Wert von $f'(x_0)$ etwas vorausgesetzt zu werden brauchte), so hat dort $f'(x)$ ein Maximum oder Minimum. Die Kurve ist dann an einer solchen Stelle stärker oder weniger stark gegen die x-Achse

geneigt, als vorher und nachher. Einen solchen Punkt nennt man einen *Wendepunkt*.

§ 54. Unbestimmte Formen bei algebraischen Funktionen.

Es kommt zuweilen vor, daß ein analytischer Ausdruck einer Funktion, der im allgemeinen zu jedem x — oder doch zu jedem x eines bestimmten Intervalls — einen bestimmten Wert von y liefert, dies für einzelne Ausnahmewerte von x nicht tut. Der wichtigste unter diesen Fällen ist der, daß man es mit einem Bruch zu tun hat, dessen Zähler und Nenner beide für einen und denselben Wert von x Null werden.

Hat man es mit einem rationalen Bruch zu tun, so kann man ein solches Vorkommen immer ohne weiteres beseitigen. Denn wenn eine rationale ganze Funktion von x für einen bestimmten Wert x_0 von x gleich Null wird, so ist sie nach einem Satze, von dem wir schon in § 34 Gebrauch gemacht haben, durch $x - x_0$ teilbar. Wenn also Zähler und Nenner eines rationalen Bruches für $x = x_0$ beide gleich Null werden, so sind sie beide durch $x - x_0$ teilbar, der Bruch kann mit diesem Faktor gekürzt werden. Werden, auch nachdem dies geschehen ist, Zähler und Nenner immer noch Null für $x = x_0$, so kann man noch einmal mit $x - x_0$ kürzen. Schließlich muß der Fall eintreten, daß Zähler und Nenner nicht mehr beide für $x = x_0$ Null werden. Wird dann weder der Zähler, noch der Nenner Null, so hat der gekürzte Bruch für $x = x_0$ einen endlichen und von Null verschiedenen Wert; wird der Zähler Null, der Nenner aber nicht, so ist der Wert des Bruches für $x = x_0$ gleich Null; für den Fall endlich, daß der Nenner Null wird, der Zähler aber nicht, haben wir schon früher (§ 20) die Redeweise eingeführt: der Bruch wird für $x = x_0$ unendlich groß.

Weniger einfach liegt die Sache, wenn man nicht mit einem rationalen, sondern mit einem irrationalen — aber immer noch algebraischen — Bruch zu tun hat. Man kann dann häufig nicht sofort kürzen, sondern muß erst umformen. Ist z. B. vorgelegt

$$y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \tag{1}$$

so werden Zähler und Nenner gleichzeitig Null, wenn $x = 0$ gesetzt

wird; aber wir können nicht ohne weiteres mit x heben. Doch gelingt die Reduktion, wenn wir erst die Wurzelgrößen aus dem Zähler wegschaffen. (Vgl. § 13, p. 45). Wir multiplizieren im Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$$

dann erhalten wir:

$$y=\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}.$$

Nunmehr können wir mit x kürzen und erhalten:

$$y=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}. \tag{2}$$

Der so umgeformte Bruch erscheint nun für $x=0$ nicht mehr in unbestimmter Form, sondern erhält den bestimmten Wert 1.

Wir müssen aber doch, bevor wir weiter gehen, zusehen, was wir da eigentlich gemacht haben. Wir haben erst mit $x-x_0$ dividiert und nachher $x=x_0$, also $x-x_0=0$ gesetzt. Ist denn das erlaubt? Das ist dieselbe Frage, die uns schon in § 5 begegnete; sie ist hier ähnlich wie dort zu beantworten:

1. Zunächst müssen wir sagen: durch einen Ausdruck solcher Form wie (1) ist eine Funktion von x nicht für alle Werte eines bestimmten Intervalls — hier des Intervalls zwischen -1 und $+1$ — definiert, sondern nur für alle Werte dieses Intervalls *mit Ausnahme des einen Wertes* $x=0$. Es hat daher zunächst gar keinen Sinn zu fragen: welchen Wert hat diese Funktion für $x=0$? Wir können auch gar nicht behaupten, der Ausdruck (2) sei dem Ausdruck (1) für alle Werte von x gleich, sondern nur „für alle Werte von x mit Ausnahme von $x=0$."

2. Stellen wir uns auf den Standpunkt der reinen Analysis, so können wir weiter sagen: eben weil diese Funktion durch den Ausdruck (1) für $x=0$ nicht definiert ist, können wir diese Definition durch eine willkürliche Verabredung ergänzen: wir können sagen: wir wollen eine Funktion dadurch definieren, daß ihr Wert für $x \gtrless 0$ dem des Ausdrucks (1) gleich, für $x=0$ aber gleich 1 sein soll.

3. Wir müssen aber nun weiter fragen: was gewinnen wir durch eine solche anscheinend ganz willkürliche Verabredung? Wodurch zeichnet sich die so definierte Funktion vor anderen Funktionen

aus, die wir erhalten würden, wenn wir für $x = 0$ den oder jenen anderen Wert vorschreiben würden? Darauf ist zu sagen: wir erreichen durch die getroffene Festsetzung, daß wir eine *stetige* Funktion von x definieren. Der Wert, den der Ausdruck (2) für $x = 0$ annimmt, schließt sich stetig an diejenigen Werte an, die derselbe Ausdruck für sehr kleine Werte von x annimmt: wenn wir also unserer Funktion (1) nicht nur für $x \gtrless 0$, sondern auch für $x = 0$ dieselben Werte zuschreiben, wie dem Ausdruck (2), so erreichen wir damit, daß die Werte der Funktion (1) auch bei $x = 0$ sich stetig aneinander anschließen. Wir können sagen: $y = 1$ für $x = 0$ ist gerade derjenige Wert, der einen stetigen Übergang zwischen den zu negativen und den zu positiven Werten von x gehörigen Funktionswerten vermittelt. Geometrisch würden wir das Sachverhältnis folgendermaßen zu schildern haben: durch die Gleichung (1) ist eine Kurve definiert, von der sich ein Zug der y-Achse von der Seite der negativen x, der andere von der Seite der positiven x her nähert; und zwar nähern sich beide Züge unbegrenzt einem und demselben Punkte der y-Achse, nämlich dem Punkte $y = 1$. Wenn wir also diesen Punkt ($x = 0$, $y = 1$) auch noch mit zu der Kurve hinzunehmen, so stellen wir damit die Verbindung zwischen den beiden Kurvenzügen her und können das so entstehende Gebilde vernünftigerweise als eine einzige zusammenhängende Kurve ansehen.

4. Damit wird nun auch den Bedürfnissen der Anwendungen der Analysis Genüge geleistet; denn diese verlangen in den weitaus meisten Fällen stetige Funktionen.

§ 55. Unbestimmte Formen bei transzendenten Funktionen.

Wenn eine transzendente (nicht algebraische) Funktion für einen bestimmten Wert x_0 des Arguments in der unbestimmten Form $0/0$ erscheint, können wir das nicht immer wie bei algebraischen Funktionen durch eine Umformung beseitigen. Wir müssen dann auf die zuletzt ausgeführten Überlegungen zurückgreifen und das Verlangen direkt so stellen: es soll derjenige Wert gesucht werden, der sich stetig an die für wenig größere oder für wenig kleinere Argumentwerte vorhandenen Funktionswerte anschließt (vorausgesetzt daß es einen solchen Wert gibt, was bei transzendenten Funktionen keines-

wegs immer der Fall ist). Um das ausführen zu können, brauchen wir nur die Funktionswerte zu kennen, die für sehr wenig von x_0 verschiedene x eintreten; wir können also bei Bestimmung dieser Werte die Differenz $x - x_0$ als eine kleine Größe im Sinne von § 54 betrachten.

Sei z. B. der Bruch vorgelegt:

$$y = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{e^x + e^{-x} - 2}, \tag{1}$$

der für $x = 0$ in der unbestimmten Form $0/0$ erscheint, so haben wir:

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$

$$e^{-x} \sim 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6},$$

also

$$e^x - e^{-x} - 2x \sim \frac{x^3}{6}, \quad e^x + e^{-x} - 2 \sim \frac{x^2}{2}$$

und folglich

$$y \sim \frac{x}{3}. \tag{2}$$

Wir werden also die gewünschte stetige Verbindung zwischen den zu positiven und den zu negativen Argumentwerten gehörenden Funktionswerten erhalten, wenn wir in diesem Falle der Funktion y für $x = 0$ den Wert 0 beilegen.

In ähnlicher Weise können wir in vielen Fällen verfahren, nämlich immer dann, wenn Zähler und Nenner der vorgelegten Funktion in der Nähe des in Betracht kommenden Wertes x_0 von x sich näherungsweise durch eine rationale ganze Funktion darstellen lassen. Man muß dabei nur jedesmal im Zähler und Nenner die Entwicklung soweit treiben, bis Glieder übrig bleiben, die sich nicht wegheben. Für andere Fälle bedarf man spezieller Formeln; einige davon wollen wir ableiten:

1. Wenn x durch positive Werte über alle Grenzen wächst, so wächst auch e^x über alle Grenzen; denn aus der Gleichung (2) von § 44 geht hervor, daß $e^x > 1 + x$ ist. Wir drücken das durch die folgende Schreibweise aus:

$$\lim_{x = +\infty} e^x = \infty. \tag{3}$$

2. Daraus ergibt sich weiter:

$$\lim_{x=-\infty} e^x = \lim_{z=+\infty} e^{-z} = \lim_{z=+\infty} \frac{1}{e^z} = 0. \tag{4}$$

3. Es ist aber auch, wenn x positiv ist, für jeden positiven ganzzahligen Exponenten n:

$$e^x x^{-n} > \frac{x}{(n+1)!},$$

also ist für jedes solche n (und dann überhaupt für jedes positive n):

$$\lim_{x=+\infty} e^x x^{-n} = \infty \tag{5}$$

und

$$\lim_{x=+\infty} e^{-x} x^n = 0. \tag{6}$$

4. Schreiben wir hier $-x$ für x, so erhalten wir:

$$\lim_{x=-\infty} e^{-x} x^{-n} = \pm\infty \tag{7}$$

und

$$\lim_{x=-\infty} e^x x^n = 0. \tag{8}$$

(Das doppelte Vorzeichen in (7) hat folgende Bedeutung: wenn der Zähler von n gerade ist, gilt das obere, wenn er ungerade ist, das untere Zeichen).

5. Setzen wir in (6) und (8) x^ν für e^x, also $\nu \log x$ für x, nehmen $n = 1$, und lassen den Faktor ν weg, so erhalten wir noch:

$$\lim_{x=0} (x^\nu \log x) = 0$$

und

$$\lim_{x=\infty} (x^{-\nu} \log x) = 0.$$

Siebenter Abschnitt.

Interpolation.

§ 56. Interpolation durch eine rationale ganze Funktion.

Naturwissenschaftliche Untersuchungen führen häufig auf die Aufgabe: Zu einer Anzahl von Werten einer unabhängigen Variabeln x sind die zugehörigen Werte einer Funktion y von ihr durch Beobachtung bestimmt; man soll einen Ausdruck

$$y = f(x)$$

aufstellen, der diese Werte von y liefert, wenn man die beobachteten Werte von x in ihn einsetzt. Stellen wir die x und die y durch kartesische Koordinaten eines Punktes in der Ebene dar, so entspricht dieser Aufgabe die geometrische: *durch eine Anzahl vorgegebener Punkte eine Kurve zu legen.* Aus dieser Formulierung erhellt sofort die große Unbestimmtheit dieser Aufgabe: durch eine Anzahl Punkte können wir nicht nur eine, sondern eine ganz beliebige Anzahl von Kurven legen; es muß also unendlich viele Funktionen geben, die für die vorgeschriebenen Werte von x die zugehörigen Werte von y liefern.

Zu einer bestimmteren Formulierung der Aufgabe gelangen wir, wenn wir verlangen, der Ausdruck von y soll aus einer bestimmten Klasse von Abhängigkeitsgesetzen gewählt werden, er soll eine bestimmte Form haben. In dieser Hinsicht bieten sich zunächst die *rationalen ganzen Funktionen* von x dar. Wir wollen also fordern, die gegebenen Beobachtungen durch eine rationale ganze Funktion von x darzustellen:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots,$$

d. h. die Koeffizienten $a, b, c, \dots$ in dieser Funktion so zu wählen,

daß sie für die gegebenen Werte von x die zugehörigen Werte von y liefert. Das verlangt, daß die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 + \ldots &= y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 + \ldots &= y_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \\ a + bx_n + cx_n^2 + dx_n^3 + \ldots &= y_n. \end{aligned}$$

(In diesen Gleichungen sind, abweichend von dem sonst festgehaltenen Gebrauch, die unbekannten Größen mit den letzten, die bekannten mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet.)

Ist die Anzahl der in die Formel aufgenommenen Koeffizienten kleiner als die Anzahl der vorliegenden Beobachtungen, so werden diese Gleichungen im allgemeinen wenigstens sich widersprechen: es wird nicht möglich sein, Werte der unbekannten Koeffizienten anzugeben, die ihnen allen genügen, also auch nicht möglich sein, die Beobachtungen durch eine Formel der angenommenen Gestalt darzustellen. Ist es in einem einzelnen Falle doch möglich, so spricht das stark dafür, daß die Formel in diesem Falle mehr ist, als eine bloße „Interpolationsformel," daß wir mit ihr den wirklichen Ausdruck eines Naturgesetzes gefunden haben.

Ist die Anzahl der angenommenen Koeffizienten genau gleich der Anzahl der vorliegenden Beobachtungen, so kann man die Gleichungen in jedem Falle nach den unbekannten Koeffizienten auflösen. Man könnte ja befürchten, daß auch in diesem Falle einige der Gleichungen den übrigen widersprechen würden, was sich dadurch zeigen müßte, daß die Anwendung der im allgemeinen geltenden Auflösungsformeln auf diesen speziellen Fall eine Division durch Null erfordern würde. Eine genauere Untersuchung, für die hier nicht der Ort ist, würde zeigen, daß das bei unseren Gleichungen hier niemals eintreten kann, solange die beobachteteten Werte von x, wie wir doch selbstverständlich voraussetzen, alle voneinander verschieden sind: die Größen, mit denen bei der Auflösung zu dividieren ist, sind immer nur Differenzen je zweier x und Produkte aus solchen Differenzen.

Am einfachsten fällt die Rechnung aus, wenn die Werte der x *aequidistant* sind, d. h. wenn die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender x einander gleich sind. Wir wollen ein derartiges Beispiel durchführen. Es seien die folgenden zusammengehörigen Werte zweier Variablen x und y beobachtet:

$$
\begin{array}{ll}
x = 1\,, & y = 0{,}6931 \\
2 & 1{,}0986 \\
3 & 1{,}3863 \\
4 & 1{,}6094 \\
5 & 1{,}7917 \\
6 & 1{,}9459\,.
\end{array}
$$

Sollen diese durch eine Formel der Gestalt

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5,$$

dargestellt werden, so müssen deren unbekannte Koeffizienten den folgenden Gleichungen genügen:

$$
\left.
\begin{aligned}
a + 6b + 36c + 216d + 1296e + 7776f &= 1{,}9459 \\
a + 5b + 25c + 125d + 625e + 3125f &= 1{,}7917 \\
a + 4b + 16c + 64d + 256e + 1024f &= 1{,}6094 \\
a + 3b + 9c + 27d + 81e + 243f &= 1{,}3863 \\
a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32f &= 1{,}0986 \\
a + b + c + d + e + f &= 0{,}6931\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

Indem wir jede dieser Gleichungen von der folgenden subtrahieren, erhalten wir zunächst:

$$
\left.
\begin{aligned}
b + 11c + 91d + 671e + 4651f &= 0{,}1542 \\
b + 9c + 61d + 369e + 2101f &= 0{,}1823 \\
b + 7c + 37d + 175e + 781f &= 0{,}2231 \\
b + 5c + 19d + 65e + 211f &= 0{,}2877 \\
b + 3c + 7d + 15e + 31f &= 0{,}4055\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

Wenn wir dann, um auch b zu eliminieren, jede dieser Gleichungen (2) wieder von der folgenden subtrahieren, erhalten wir:

$$
\left.
\begin{aligned}
2c + 30d + 302e + 2550f &= -0{,}0281\,, \\
2c + 24d + 194e + 1320f &= -0{,}0408\,, \\
2c + 18d + 110e + 570f &= -0{,}0646\,, \\
2c + 12d + 50e + 180f &= -0{,}1178\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

Die Koeffizienten auf der rechten Seite dieser Gleichungen haben alle den gemeinsamen Faktor 2; wir können und werden zweckmäßigerweise mit ihm dividieren und erhalten so:

$$\begin{aligned} c + 15d + 151e + 1275f &= -0{,}01405, \\ c + 12d + 97e + 660f &= -0{,}02040, \\ c + 9d + 55e + 285f &= -0{,}03230, \\ c + 6d + 25e + 90f &= -0{,}05890. \end{aligned} \tag{4}$$

Durch abermalige Subtraktion finden wir weiter:

$$\begin{aligned} 3d + 54e + 615f &= 0{,}00635, \\ 3d + 42e + 375f &= 0{,}01190, \\ 3d + 30e + 195f &= 0{,}02660, \end{aligned} \tag{5}$$

oder nach Division mit 3:

$$\begin{aligned} d + 18e + 205f &= 0{,}0021167, \\ d + 14e + 125f &= 0{,}0039667, \\ d + 10e + 65f &= 0{,}0088667. \quad (4) \end{aligned} \tag{6}$$

Hier mußten wir, wenn wir mit Dezimalbrüchen weiter rechnen wollten, die Division notwendigerweise irgendwo abbrechen. Wir haben sie mit der 7. Stelle nach dem Dezimalkomma abgebrochen; der dadurch entstandene Fehler beträgt schlimmstenfalls vier Einheiten der 8. Stelle. Das ist durch die den Gleichungen in Klammern beigesetzte kleine vier angedeutet.

Subtrahieren wir abermals, so können die Fehler von Minuend und Subtrahend ungünstigenfalls zusammenwirken; wir haben also dann:

$$\begin{aligned} 4e + 80f &= -0{,}0018500, \\ 4e + 60f &= -0{,}0049000, \quad (8) \end{aligned} \tag{7}$$

oder nach Division mit 4

$$\begin{aligned} e + 20f &= -0{,}0004625, \\ e + 15f &= -0{,}0012250. \quad (7) \end{aligned} \tag{8}$$

Der schon vorhandene Fehler wird durch die Division mit 4 ebenfalls auf seinen vierten Teil reduziert; dazu tritt aber noch der ev. durch das Abbrechen dieser Division entstehende Fehler.

Endlich kommt:

$$5f = 0{,}0007625 \quad (14) \tag{9}$$

und folglich:

$$f = 0{,}0001525. \quad (3) \tag{10}$$

Nachdem so f berechnet ist, erhalten wir die übrigen Koeffizienten am bequemsten, wenn wir von jedem der aufgestellten Gleichungssysteme die letzte Gleichung benutzen. Freilich werden

sich bei solchem Vorgehen die Fehler ziemlich stark häufen; es ist aber zu berücksichtigen, daß wir die ersten Koeffizienten in der Tat nur mit geringerer Genauigkeit zu kennen brauchen als die letzten, wenn wir wollen, daß die vorgelegten Gleichungen mit einem bestimmten Maß von Genauigkeit erfüllt sein sollen. Denn die letzten Koeffizienten sind wenigstens in einem Teil dieser Gleichungen mit viel größeren Zahlenfaktoren multipliziert als die ersten.

Die Ausführung ergibt der Reihe nach:

$$\begin{array}{rrr}
 & -0{,}0012250 & (7) \\
-15f = & -0{,}0022875 & (45) \\
\hline
e = & -0{,}0035125 & (52)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
 & 0{,}0088667 & (4) \\
-10e = & +0{,}0351250 & (520) \\
-65f = & -0{,}0099125 & (185) \\
\hline
d = & 0{,}0340792 & (709)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
 & -0{,}0589000 & \\
-6d = & -0{,}2044752 & (4254) \\
-90f = & -0{,}0137250 & (270) \\
\hline
 & -0{,}2771002 & \\
-25e = & +0{,}0878125 & (1300) \\
\hline
c = & -0{,}1892877 & (5824)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr}
 & 0{,}4055000 & \\
-15e = & 0{,}0526875 & (780) \\
-3c = & 0{,}5678631 & (17472) \\
\hline
 & 1{,}0260506 & \\
 & -0{,}2432819 & (5056) \\
\hline
b = & 0{,}7827687 & (25308)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
-7d = & -0{,}2385544 & (4963) \\
-31f = & -0{,}0047275 & (93) \\
\hline
 & -0{,}2432819 & (5056)
\end{array}$$

endlich:

$$\begin{array}{rrr}
 & 0{,}6931000 & \\
-e = & 0{,}0035125 & (52) \\
-c = & 0{,}1892877 & (5824) \\
\hline
 & 0{,}8859002 & (5876) \\
 & -0{,}8170004 & (26048) \\
\hline
a = & 0{,}0688998 & (31924).
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
-f = & -0{,}0001525 & (3) \\
-d = & -0{,}0340792 & (709) \\
-b = & -0{,}7827687 & (25308) \\
\hline
 & -0{,}8170004 & (26048)
\end{array}$$

Man sieht, daß man in (6) notwendig die Division bis zur 7. Stelle fortsetzen mußte, da sonst die zu befürchtenden Fehler noch 10mal so groß sein würden. Setzen wir die gefundenen Werte in

die allgemeine Formel ein und kürzen sie dabei auf eine Stelle mehr ab, als garantiert werden kann, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} y = 0{,}0689 + 0{,}7828x - 0{,}18929x^2 \\ + 0{,}034079x^3 - 0{,}0035125x^4 + 0{,}0001525x^5. \end{aligned} \tag{11}$$

Wollen wir eine Probe auf die Richtigkeit der Rechnung machen, so mögen wir zusehen, ob eine der übrigen Gleichungen des ersten Systems durch die gefundenen Werte wirklich erfüllt wird. Wir erhalten etwa:

$$\begin{array}{rlr} a = & 0{,}0689 & \\ 5b = & 3{,}9135 & \\ 25c = & & -4{,}7322 \\ 125d = & 4{,}2599 & \\ 625e = & & -2{,}1953 \\ 3125f = & 0{,}4766 & \\ \hline & 8{,}7189 & -6{,}9275 \\ & -6{,}9275 & \\ \hline & 1{,}7914 & \text{statt } 1{,}7917. \end{array}$$

Die Übereinstimmung ist als vollständig genügend zu erachten; wir wußten ja, daß wir die Richtigkeit der 4. Stelle nach dem Dezimalkomma in den Werten von a und b nicht garantieren konnten.

Nun ist aber noch ein wesentlicher Punkt zu besprechen. Die Beobachtungen, die wir durch die Formel darstellen wollen, werden niemals absolut genau sein; weder werden wir es so einrichten können, daß die Werte von x, zu denen wir die zugehörigen y beobachten, genau um das angenommene Intervall voneinander entfernt sind, noch werden wir diese Werte der y selbst als genau ansehen dürfen. Sie werden vielmehr mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet sein. Von der Ungenauigkeit in der Bestimmung der x können wir jedoch hier absehen: ist ein y beobachtet, das nicht zu einem der ausgewählten x, sondern zu einem etwas davon verschiedenen gehört, so ist doch damit das y, das zu dem ausgewählten x gehört, näherungsweise bestimmt. Wir dürfen also für unsere augenblicklichen Zwecke die Ungenauigkeit ganz auf die y schieben. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, die Werte der y seien auf so viele Stellen als zuverlässig anzusehen, als hier angegeben sind, d. h. der Fehler des einzelnen y betrage höchstens eine Einheit der letzten angegebenen Stelle, also fünf Einheiten der 5. Stelle nach dem Dezimalkomma. Werden aber zwei

Größen, von denen jede nur auf fünf Einheiten der 5. Stelle zuverlässig ist, voneinander subtrahiert, so wird die Differenz nur auf zehn Einheiten derselben Stelle garantiert werden können; denn es könnte ja sein, daß der Minuend um fünf Einheiten zu groß, der Subtrahend um ebensoviele zu klein angegeben wäre, oder umgekehrt. Die rechten Seiten der Gleichungen (2) werden also in diesem Falle um zehn Einheiten falsch sein können, die rechten Seiten der Gleichungen (3) um 20. Die Division mit 2 vermindert dann den zu befürchtenden Fehler wieder, sodaß die rechten Seiten der Gleichungen (4) als auf zehn Einheiten der 5. Stelle zuverlässig anzusehen sind, die der Gleichungen (5) dann wieder auf 20. Durch die Division mit 3 vermindert sich der Fehler wieder; jetzt tritt aber der durch das Abbrechen der Division möglicherweise entstehende Fehler hinzu, sodaß die rechten Seiten der Gleichungen (6) nur auf 6670 Einheiten der 8. Stelle als garantiert anzusehen sind.

So fortschließend erkennt man, daß der schlimmstenfalls zu befürchtende Fehler beträgt:

in den Gleichungen (7): 13340,
" " " (8): 3335,
" der Gleichung (9): 6670,

und endlich im Werte von f: 1334 Einheiten der 8. Stelle nach dem Dezimalkomma.

Schließt man so weiter, so würde man zunächst zu der Befürchtung gelangen, daß in den Werten der ersten Koeffizienten die Fehler sich ganz außerordentlich häufen könnten, sodaß z. B. von dem Werte des Koeffizienten a durch eine solche Rechnung hier nicht einmal angegeben werden könnte, ob er positiv oder negativ ausfällt. Tatsächlich steht die Sache nicht so schlimm: eine genauere Überlegung zeigt, daß bei dieser Bestimmung der übrigen Koeffizienten aus dem f die Fehler der vorhergehenden Rechnung niemals alle nach derselben Richtung wirken können. Wir werden ein Urteil über die Zuverlässigkeit der Rechnung gewinnen können, wenn wir den ungünstigsten Fall ins Auge fassen, daß nämlich die angegebenen Werte der y alle um eine halbe Einheit der vierten Stelle falsch, und zwar abwechselnd zu klein und zu groß wären. Wären etwa ihre richtigen Werte, statt der in den Gleichungen (1) stehenden:

1,94595, 1,79165, 1,60945, 1,38625, 1,09865, 0,69305,

so würde in den Gleichungen (2) rechts zu stehen haben:

0,1543, 0,1822, 0,2232, 0,2876, 0,4056,

in den Gleichungen (3):

− 0,0279, − 0,0410, − 0,0644, − 0,1180,

in den Gleichungen (4):

− 0,01395, − 0,02050, − 0,03220, − 0,05900,

in den Gleichungen (5):

0,00655, 0,01170, 0,02680,

in den Gleichungen (6):

0,0021833, 0,0039000, 0,0089333,

in den Gleichungen (7):

− 0,0017166, − 0,0050333,

in den Gleichungen (8):

− 0,0004291, − 0,0012583,

in der Gleichung (9):

0,0008292

und als Wert von f würde sich ergeben

$$f = 0{,}0001658.$$

Daraus würde dann weiter folgen:

$$\begin{array}{rl} & -0{,}0012583 \\ -15f = & -0{,}0024870 \\ \hline e = & -0{,}0037453 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 0{,}0089333 \\ -10e = & 0{,}0374530 \\ -65f = & -0{,}0107770 \\ \hline d = & 0{,}0356093 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & -0{,}0590000 \\ -\ 6d = & -0{,}2136558 \\ -90f = & -0{,}0149220 \\ \hline & -0{,}2875778 \\ -25e = & +0{,}0936325 \\ \hline c = & -0{,}1939453 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 0{,}4056000 \\ -15e = & 0{,}0561795 \\ -\ 3c = & 0{,}5818359 \\ \hline & 1{,}0436154 \\ & -0{,}2544049 \\ \hline b = & 0{,}7892105 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -\ 7d = & -0{,}2492651 \\ -31f = & -0{,}0051398 \\ \hline & -0{,}2544049 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr}
 & 0{,}6930500 & & \\
-e = & 0{,}0037453 & -f = & -0{,}0001658 \\
-c = & 0{,}1939453 & -d = & -0{,}0356093 \\
\hline
 & 0{,}8907406 & -b = & -0{,}7892105 \\
\cline{3-4}
 & -0{,}8249856 & & -0{,}8249856. \\
\hline
a = & 0{,}0657550 & &
\end{array}$$

Statt der Gleichung (11) erhalten wir also in diesem Falle die folgende:

$$\begin{aligned} y = 0{,}0658 + 0{,}7892x - 0{,}19395x^2 \\ + 0{,}035609x^3 - 0{,}0037453x^4 + 0{,}0001658x^5. \end{aligned} \tag{12}$$

Man sieht, daß keiner der Koeffizienten auf 1 Prozent seines Wertes genau bestimmt werden kann, wenn die beobachteten y auf ein Zehntausendstel ihrer Werte unsicher sind.

Eine Vorstellung von dem Einfluß eines einzelnen Fehlers in den Beobachtungen auf das Schlußresultat erhält man, wenn man eine Funktion y bildet, die für die Werte $x = 1, 2, 3, 4, 5$ den Wert 0, für $x = 6$ aber den Wert 0,00005 hat. Man findet:

$$\begin{aligned} y = -0{,}0000504 + 0{,}0001151x - 0{,}0000945x^2 \\ + 0{,}0000357x^3 - 0{,}0000063x^4 + 0{,}00000042x^5. \end{aligned} \tag{13}$$

§ 57. Gesonderte Berechnung der Terme gerader und derjenigen ungerader Ordnung.

In Fällen, wie der im vorigen Paragraphen diskutierte, kann häufig eine gewisse Erleichterung der Rechnung dadurch gewonnen werden, daß man den Anfangspunkt der Zählung der unabhängigen Veränderlichen in die Mitte desjenigen Intervalls verlegt, dem die vorliegenden Beobachtungen angehören. Dabei können wir noch, um unnötige Brüche bei den Werten des neuen Arguments zu vermeiden, den Maßstab ev. ändern. So werden wir für das behandelte Beispiel setzen:

$$x = \frac{\xi + 7}{2}, \qquad \xi = 2x - 7 \tag{1}$$

Dann können wir y als Funktion von ξ ansehen und die Beobachtungen zunächst durch eine Formel darzustellen versuchen, die nach Potenzen dieser neuen Größe geordnet ist:

$$y = \varphi(\xi) = \alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3 + \varepsilon\xi^4 + \zeta\xi^5 \tag{2}$$

Wir können hier die Glieder mit ungeraden und diejenigen mit geraden Exponenten voneinander trennen und schreiben:

$$y = \eta_1 + \xi\eta_2 \tag{3}$$

wo:

$$\eta_1 = \alpha + \gamma\xi^2 + \varepsilon\xi^4,$$
$$\eta_2 = \beta + \delta\xi^2 + \zeta\xi^4. \tag{4}$$

Da

$$\varphi(-\xi) = \alpha - \beta\xi + \gamma\xi^2 - \delta\xi^3 + \varepsilon\xi^4 - \zeta\xi^5 \tag{5}$$

ist, so ergibt sich:

$$\eta_1 = \tfrac{1}{2}\{\varphi(\xi) + \varphi(-\xi)\},$$
$$\eta_2 = \frac{1}{2\xi}\{\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)\}. \tag{6}$$

Wir können also damit beginnen, daß wir die beiden Größen η_1 und η_2 aus den Beobachtungen berechnen und dann zunächst diese beiden durch je eine Formel darzustellen versuchen. Dazu bilden wir folgende Tabelle:

x	ξ	y		Summe	Differenz	η_1	η_2
1	-5	0,6931					
2	-3	1,0986					
3	-1	1,3863					
4	$+1$	1,6094	1,3863	2,9957	0,2231	1,49785	0,11155
5	$+3$	1,7917	1,0986	2,8903	0,6931	1,44515	0,11552
6	$+5$	1,9459	0,6931	2,6390	1,2528	1,31950	0,12528.

Wir haben also die drei Koeffizienten α, γ, ε aus folgenden drei Gleichungen zu berechnen:

$$\alpha + 25\gamma + 625\varepsilon = 1{,}31950,$$
$$\alpha + 9\gamma + 81\varepsilon = 1{,}44515,$$
$$\alpha + \gamma + \varepsilon = 1{,}49785.$$

Das gibt der Reihe nach, wie im vorigen Paragraphen:

$$16\gamma + 544\varepsilon = -0{,}12565$$
$$8\gamma + 80\varepsilon = -0{,}05270$$
$$\gamma + 34\varepsilon = -0{,}007853$$
$$\gamma + 10\varepsilon = -0{,}006587$$
$$24\varepsilon = -0{,}001266$$
$$\varepsilon = -0{,}00005275$$
$$-10\varepsilon = +0{,}0005275$$
$$-0{,}006587$$
$$\gamma = -0{,}006060$$

$$1{,}49785$$
$$-\gamma = 0{,}00606$$
$$-\varepsilon = 0{,}00005$$
$$\alpha = 1{,}50396$$

Ebenso erhalten wir die drei Koeffizienten des Ausdrucks von η_2 durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl}
\beta + 25\,\delta + 625\,\zeta &= 0{,}12528 \\
\beta + 9\,\delta + 81\,\zeta &= 0{,}11552 \\
\beta + \delta + \zeta &= 0{,}11155 \\
\hline
16\,\delta + 544\,\zeta &= 0{,}00976 \\
8\,\delta + 80\,\zeta &= 0{,}00397 \\
\hline
\delta + 34\,\zeta &= 0{,}000610 \\
\delta + 10\,\zeta &= 0{,}000496 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
24\,\zeta &= 0{,}000114 \\
\zeta &= 0{,}00000475 \\
-10\,\zeta &= -0{,}0000475 \\
 & +0{,}000496 \\
\hline
\delta &= 0{,}000449 \\
 & \\
 & 0{,}11155 \\
-\delta &= -0{,}00045 \\
-\zeta &= -0{,}00000 \\
\hline
\beta &= -0{,}11110
\end{array}$$

Fassen wir beide Resultate zusammen, so erhalten wir den gesuchten Ausdruck von y diesmal in der Form:

$$y = 1{,}50396 + 0{,}11110\,\xi - 0{,}006060\,\xi^2 + 0{,}000449\,\xi^3 - 0{,}00005275\,\xi^4 + 0{,}00000475\,\xi^5.$$

In vielen Fällen ist nun gar kein Grund vorhanden, weshalb wir lieber einen nach Potenzen von x als einen nach Potenzen von ξ geordneten Ausdruck von y verlangen sollten, dann können wir uns mit dem eben gefundenen Ausdruck vollständig zufrieden geben. Wollen wir aber einen nach Potenzen von x selbst geordneten Ausdruck, so brauchen wir nur in (6) wieder $2x - 7$ für ξ zu substituieren, auszurechnen und umzuordnen. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
y = {} & 1{,}50396 + 0{,}11110\,(2x - 7) - 0{,}006060\,(4x^2 - 28x + 49) \\
& + 0{,}000449\,(8x^3 - 84x^2 + 294x - 343) \\
& - 0{,}00005275\,(16x^4 - 224x^3 + 1176x^2 - 2744x + 2401) \\
& + 0{,}00000475\,(32x^5 - 560x^4 + 3920x^3 - 13720x^2 + 24010x - 16807) \\
= {} & 1{,}50396 \\
& - 0{,}77770 + 0{,}22220x \\
& - 0{,}29694 + 0{,}16968x - 0{,}024240x^2 \\
& - 0{,}15401 + 0{,}13201x - 0{,}037716x^2 + 0{,}003592x^3 \\
& - 0{,}12665 + 0{,}14475x - 0{,}062034x^2 + 0{,}011816x^3 - 0{,}0008440x^4 \\
& - 0{,}07983 + 0{,}11405x - 0{,}065170x^2 + 0{,}018620x^3 - 0{,}0026600x^4 + 0{,}0001520x^5 \\
= {} & +0{,}06883 + 0{,}78269x - 0{,}189160x^2 + 0{,}034028x^3 - 0{,}0035040x^4 + 0{,}0001520x^5
\end{aligned}$$

Früher hatten wir:

$$y = 0,0689 + 0,7828x - 0,18929x^2 + 0,034079x^3 - 0,0035125x^4 + 0,0001525x^5;$$

die Abweichungen zwischen beiden Resultaten sind nicht größer als es die Natur der Rechnung erwarten ließ.

Man sieht: wenn die zuletzt durchgeführte Umrechnung nicht erforderlich ist, ist das zweite Verfahren merklich bequemer als das erste, insofern es sehr viel weniger Mühe macht, zwei Systeme von je drei linearen Gleichungen mit je drei Unbekannten aufzulösen, als ein einziges System von 6 solchen Gleichungen mit 6 Unbekannten. Die Umformung ist allerdings, wenn sie erforderlich ist, eine unangenehme Zugabe.

§ 58. Diskussion der Bedeutung einer Interpolation.

Wenn wir nun nach einer der in den beiden vorigen Paragraphen gelehrten Verfahrungsweisen einen Ausdruck für y gefunden haben, der die Beobachtungen wiedergibt: welches Recht haben wir, zu erwarten, daß dieser Ausdruck auch für andere Werte von x als die beobachteten die zugehörigen Werte von y richtig liefern wird? und welches Recht haben wir dazu, daß wir in einer so gefundenen Formel den Ausdruck eines wirklichen Naturgesetzes sehen?

Auf die erste Frage ist rein mathematisch betrachtet die Antwort nur folgende: gar kein Recht. Denn sei $F(x)$ der unbekannte richtige Ausdruck der gesuchten Funktion, $f(x)$ der durch die Interpolationsformel gelieferte, so wissen wir von der Differenz

$$D(x) = F(x) - f(x) \tag{1}$$

nur, daß sie für die gegebenen Werte von x den Wert Null annimmt. Selbst wenn wir also wüßten, daß diese Differenz eine ganze rationale Funktion von x sein muß, so könnte sie immer noch gleich dem Produkt von

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$$

mit irgend einer ganz beliebigen rationalen ganzen Funktion $\psi(x)$ sein; und wenn wir nicht wissen, ob $f(x)$ eine rationale ganze Funktion ist, so könnte $\psi(x)$ überhaupt eine Funktion sein, die nur für $x = 1, 2, \ldots, 6$ endlich bleiben müßte, im übrigen aber ganz beliebig sein könnte.

Wir müssen also sagen: *das Problem der Interpolation ist rein mathematisch betrachtet in hohem Maße unbestimmt.*

Anders steht die Sache, wenn wir uns auf das Prinzip der Regelmäßigkeit des Verlaufs der Naturerscheinungen berufen dürfen, das Voraussetzung aller Naturforschung ist. Dann können wir, wie schon in § 7, schließen: zwei Kurven, die eine Anzahl Punkte gemeinsam haben sollen, können zwischen diesen Punkten nicht viel voneinander abweichen, wenn nicht die eine oder die andere einen „unregelmäßigen Verlauf" aufweisen soll. Wir können das jetzt sogar mit noch mehr Recht behaupten als damals, indem aus den inzwischen durchgeführten Untersuchungen hervorgeht, daß selbst kleine Unregelmäßigkeiten im Verlauf einer Funktion große Unregelmäßigkeiten im Verlauf ihres Differentialquotienten und noch größere im Verlauf der höheren Ableitungen mit sich bringen würden.

Aber über den Verlauf der Kurve außerhalb des Gebietes der Beobachtungen läßt sich dieser Schluß nicht anwenden: zwei Kurven, die in einem begrenzten Gebiete sehr nahe aneinander verlaufen, können außerhalb dieses Gebietes sehr weit auseinander gehen (vgl. § 42). Wir können also aus Beobachtungen, die nur über ein begrenztes Intervall der unabhängigen Veränderlichen sich erstrecken, über den Verlauf der zugehörigen Funktion außerhalb dieses Gebietes gar nichts schließen, auch naturwissenschaftlich nichts. Man drückt das wohl so aus: es ist wohl gestattet, zu „interpolieren", aber nicht zu „extrapolieren". Allerdings wird man nicht unterlassen dürfen, hinzuzufügen, daß gerade die größten naturwissenschaftlichen Entdeckungen oft durch kühne Extrapolationen gelungen sind. Nur das ist wohl zu beachten, daß solche als sichergestellt erst dann angesehen werden dürfen, wenn ihre Konsequenzen durch Beobachtung oder Experiment Bestätigung gefunden haben.

Durch diese Überlegungen ist aber zugleich die Antwort auf die zweite Frage gegeben: *wir sind erst dann berechtigt, eine durch Interpolation gefundene Formel als Ausdruck eines Naturgesetzes anzusehen, wenn wir ihren Zusammenhang mit anderen Formeln erkannt haben.*

§ 59. Interpolation durch Differenzenrechnung.

Haben wir, wie in den letzten Paragraphen gelehrt worden ist, aus Beobachtungen zusammengehöriger Werte einer unabhängigen

und einer abhängigen Veränderlichen eine Formel abgeleitet, die letztere als Funktion der ersteren darstellt, und wollen wir dann den Wert von y kennen, der zu irgend einem nicht beobachteten Wert von x gehört, so brauchen wir nur diesen letzteren Wert in die abgeleitete Formel einzusetzen. Wenn wir nur zu einem Wert von x das zugehörige y wünschen, ist das in der Tat meist das bequemste, indem es dazu gar keiner weiteren Überlegung bedarf. Wollen wir aber nicht nur für einen Wert von x, sondern für eine ganze Reihe solcher Werte die zugehörigen y kennen, so können wir das auf einem anderen Wege noch bequemer erreichen; wir brauchen dazu gar nicht die allgemeine Formel erst abzuleiten.

Sehr einfach kann das geschehen, wenn eine Formel mit nur zwei Gliedern

$$y = ax + b \tag{1}$$

zur Darstellung der Beobachtungen ausreicht. In diesem Falle haben wir nämlich, wenn x_1 und x_2 zwei Werte von x sind, zu denen die zugehörigen y bekannt sind — wir werden etwa zwei Werte nehmen, zwischen denen der vorgelegte liegt — die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b, \\ y &= ax \;\; + b, \\ y_2 &= ax_2 + b. \end{aligned} \tag{2}$$

Nach dem in § 56 gelehrten Verfahren würden wir aus der ersten und zweiten dieser Gleichungen a und b berechnen und die berechneten Werte in die dritte einsetzen. Wir können aber auch so verfahren, daß wir die unbekannten Koeffizienten a und b aus allen drei Gleichungen eliminieren, d. h. daß wir aus ihnen eine Gleichung ableiten, die a und b nicht mehr enthält. Wir erhalten zunächst durch Subtraktion die zwei von b freien Gleichungen:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= a(x - x_1), \\ y_2 - y_1 &= a(x_2 - x_1), \end{aligned} \tag{3}$$

und dann durch Division die auch von a freie:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{4}$$

aus der nun y leicht entnommen werden kann. Das gibt die gewöhnliche Art der Interpolation, wie sie im größten Teil der Logarithmentafel angewendet werden kann und durch Täfelchen der „Proportionalteile“ erleichtert zu werden pflegt: $x_2 - x_1$ ist dann das

Intervall (die Einheit der letzten Stelle), nach dem die Tafel fortschreitet, $x - x_1$ ist eine der Zahlen 1—9, die Einheiten der nächsten Stelle bedeuten, $y_2 - y_1$ ist die „Tafeldifferenz", d. h. die Differenz zweier aufeinander folgender Tafelwerte; das Täfelchen der Proportionalteile enthält die in Betracht kommenden Werte des Produkts $(y_2 - y_1)(x - x_1)$. Voraussetzung dieses Verfahrens ist, daß die zu interpolierende Funktion im Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Tafelwerten näherungsweise durch eine lineare Funktion ersetzt werden darf, daß also zu gleichen Werten der Differenz $x - x_1$ auch gleiche Werte der Differenz $y - y_1$ gehören, m. a. W. daß die Tafeldifferenzen wenigstens für einige aufeinander folgende Tafelwerte dieselbe Größe haben (abgesehen von Unterschieden von einer Einheit der letzten Stelle, die durch das Abkürzen der Tafelwerte auf eine bestimmte Stellenzahl hereingekommen sein können).

Man pflegt wohl die Differenzen der x, bzw. der y mit Δx, Δy zu bezeichnen; die Gleichung (3) kann dann geschrieben werden:

$$\Delta y = a \Delta x. \tag{5}$$

In manchen Fällen reicht nun dieses einfache Interpolationsverfahren nicht aus. Man kann aber auch dann an die Differenzen der Tafelwerte anknüpfen, nur muß man noch „höhere Differenzen" berücksichtigen, indem man zuerst die Differenzen zweier aufeinander folgender Tafelwerte bildet, dann von diesen Differenzen wieder die Differenzen (die „zweiten Differenzen" der Tafelwerte) usw. Man hat selten Veranlassung, über die zweiten Differenzen hinauszugehen; wir wollen aber doch zusehen, wie sich die Sache gestaltet, wenn noch dritte und vierte Differenzen berücksichtigt werden müssen. Für die Durchführung wollen wir uns einige Vereinfachungen gestatten, die in jedem Falle durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen leicht zu erreichen sind: der Anfangspunkt der x liege in der Mitte des in Betracht kommenden Intervalls, die Einheit der x sei gleich der Differenz zweier in der Tafel aufeinanderfolgender Funktionswerte. Läßt sich die zu interpolierende Funktion in dem in Betracht kommenden Intervall mit genügender Näherung durch eine rationale ganze Funktion 4. Grades darstellen:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, \tag{6}$$

so nehmen wir die 5 aufeinander folgenden Funktionswerte:

$$\left.\begin{aligned} y_{-2} &= a - 2b + 4c - 8d + 16e, \\ y_{-1} &= a - b + c - d + e, \\ y_0 &= a, \\ y_1 &= a + b + c + d + e, \\ y_2 &= a + 2b + 4c + 8d + 16e. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wir bilden nun die Differenzen je zweier aufeinander folgender dieser Werte; dabei wollen wir uns der Bezeichnung

$$y_{n+1} - y_n = \Delta y_{n+\frac{1}{2}} \tag{8}$$

bedienen. Dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_{-\frac{3}{2}} &= b - 3c + 7d - 15e, \\ \Delta y_{-\frac{1}{2}} &= b - c + d - e, \\ \Delta y_{\frac{1}{2}} &= b + c + d + e, \\ \Delta y_{\frac{3}{2}} &= b + 3c + 7d + 15e. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Jeden dieser Werte subtrahieren wir vom folgenden und erhalten so die „zweiten Differenzen“:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2 y_{-1} &= 2c - 6d + 14e, \\ \Delta^2 y_0 &= 2c \phantom{{}- 6d} + 2e, \\ \Delta^2 y_1 &= 2c + 6d + 14e, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wiederholung dieses Verfahrens liefert noch die dritten Differenzen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^3 y_{-\frac{1}{2}} &= 6d - 12e, \\ \Delta^3 y_{\frac{1}{2}} &= 6d + 12e, \end{aligned}\right| \tag{11}$$

und die vierte:

$$\Delta^4 y_0 = 24e. \tag{12}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich die Koeffizienten $a, b, \ldots$ durch die Differenzen ausdrücken; die einfachste Gestalt nehmen die Ausdrücke an, wenn wir noch die Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_0 &= \tfrac{1}{2}(\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \Delta y_{\frac{1}{2}}), \\ \Delta^3 y_0 &= \tfrac{1}{2}(\Delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \Delta^3 y_{\frac{1}{2}}) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

einführen. Es wird nämlich dann:

$$\left.\begin{gathered} e = \tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0, \quad d = \tfrac{1}{6}\Delta^3 y_0, \quad c = \tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 - \tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0, \\ b = \Delta y_0 - \tfrac{1}{6}\Delta^3 y_0, \quad a = y_0. \end{gathered}\right\} \tag{14}$$

Wir können also den gesuchten Ausdruck von y folgendermaßen schreiben:

$$y = y_0 + x\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^3 y_0}{6}\right) + x^2\left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^4 y_0}{24}\right) + x^3\frac{\Delta^3 y_0}{6} + x^4\frac{\Delta^4 y_0}{24}; \quad (15)$$

oder anders geordnet:

$$y = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x^2}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{x^3 - x}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{x^4 - x^2}{24}\Delta^4 y_0. \quad (16)$$

Wollen wir dieses Verfahren etwa auf das in § 57 behandelte Beispiel anwenden, unter Weglassung des letzten Wertes, so haben wir zunächst die Tabelle der Differenzen zu bilden:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,6931				
	0,4055			
1,0986		− 0,1178		
	0,2877		0,0532	
1,3863		− 0,0646		− 0,0294
	0,2231		0,0238	
1,6094		− 0,0408		
	0,1823			
1,7917				

Aus ihr erhalten wir:

$$\Delta y_0 = 0{,}2554, \quad \Delta^2 y_0 = -\,0{,}0646, \quad \Delta^3 y_0 = 0{,}0385,$$
$$\Delta^4 y_0 = -\,0{,}0294,$$
$$\tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 = -\,0{,}0323, \quad \tfrac{1}{6}\Delta^3 y_0 = 0{,}00642, \quad \tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0 = -\,0{,}001225$$

und folglich:

$$y = 1{,}3863 + 0{,}2490\,(x-3) - 0{,}0311\,(x-3)^2 + 0{,}00642\,(x-3)^3$$
$$-\,0{,}001225\,(x-3)^4.$$

Soll nun für irgend einen einzelnen Wert von x, der zwischen den beobachteten gelegen ist, der zugehörige Wert von y berechnet werden, so haben wir einfach diesen Wert von x in die Formel einzusetzen. Wollen wir aber die Werte von y für eine ganze Reihe von Werten x haben, die zwischen den beobachteten etwa in gleichen Abständen liegen, so können wir folgendermaßen verfahren: Angenommen, wir suchten die Werte von y zu einer Folge von Werten x, deren Abstände δx alle einander gleich, aber nur den $n$ten Teil so groß seien als die Abstände Δx der Werte x, zu denen die y bekannt sind. Um ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu haben, wollen wir etwa $n = 10$ nehmen, so daß wir

$$\delta x = \tfrac{1}{10}\Delta x \quad (17)$$

haben. Dann können wir neben die Formel (15) die andere stellen:

$$y = y_0 + x\left(\delta y_0 - \frac{1}{6}\delta^3 y_0\right) + x^2\left(\frac{1}{2}\delta^2 y_0 - \frac{1}{24}\delta^4 y_0\right) + x^3 \cdot \frac{\delta^3 y_0}{6} + x^4 \cdot \frac{\delta^4 y_0}{24}. \quad (18)$$

Dabei ist aber noch folgendes zu beachten: In der Formel (15) war angenommen, die Einheit des x sei so gewählt, daß $\varDelta x = 1$ wird; dementsprechend setzt die Formel (18) voraus, die Einheit des x sei so gewählt, daß $\delta x = 1$ ist. Wollen wir haben, daß x in beiden Formeln dieselbe Bedeutung hat, so müssen wir etwa in (15) x durch $\frac{x}{10}$ ersetzen, so daß diese Formel übergeht in:

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{x}{10}\left(\varDelta y_0 - \frac{\varDelta^3 y_0}{6}\right) + \frac{x^2}{100}\left(\frac{\varDelta^2 y_0}{2} - \frac{\varDelta^4 y_0}{24}\right) + \frac{x^3}{1000}\,\frac{\varDelta^3 y_0}{6} \\ + \frac{x^4}{10000}\,\frac{\varDelta^4 y_0}{24}. \end{aligned} \quad (19)$$

Dann gibt die Vergleichung der Koeffizienten beider Formeln (18) und (19), die doch übereinstimmende Werte von y ergeben sollen:

$$\begin{aligned} \delta y_0 - \tfrac{1}{6}\delta^3 y_0 &= \tfrac{1}{10}(\varDelta y_0 - \tfrac{1}{6}\varDelta^3 y_0), \\ \delta^2 y_0 - \tfrac{1}{12}\delta^4 y_0 &= \tfrac{1}{100}(\varDelta^2 y_0 - \tfrac{1}{12}\varDelta^4 y_0), \\ \delta^3 y_0 &= \tfrac{1}{1000}\varDelta^3 y_0, \\ \delta^4 y_0 &= \tfrac{1}{10000}\varDelta^4 y_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir nun die δ berechnen, wenn die $\varDelta$ gegeben sind; für das vorliegende Beispiel erhalten wir:

$$\begin{array}{rl} \delta^4 y_0 = & -\,0{,}00000294 \\ \delta^3 y_0 = & 0{,}0000385 \\ & \\ \varDelta^2 y_0 = & -\,0{,}0646 \\ -\tfrac{1}{12}\varDelta^4 y_0 = & +\,0{,}00245 \\ \hline & -\,0{,}06215 \\ \delta^2 y_0 = & -\,0{,}0006215. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \varDelta y_0 = & 0{,}2554 \\ -\tfrac{1}{6}\varDelta^3 y_0 = & -\,0{,}0064 \\ \hline & 0{,}2490 \\ & 0{,}02490 \\ \tfrac{1}{6}\delta^3 y_0 = & 0{,}00001 \\ \hline \delta y_0 = & 0{,}02491 \end{array}$$

Durch Addition und Subtraktion ergibt sich noch:

$$\begin{aligned} \delta y_{\frac{1}{2}} &= \delta y_0 + \tfrac{1}{2}\delta^2 y_0 = 0{,}02460, \\ \delta^3 y_{\frac{1}{2}} &= \delta^3 y_0 + \tfrac{1}{2}\delta^4 y_0 = 0{,}00003703. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Werte können wir nun eine der Tabelle von p. 178 ganz analoge Tabelle von der rechten Seite her konstruieren, wenn wir, was wir hier dürfen, annehmen, daß die fünften Differenzen keinen Einfluß mehr haben, die vierten also alle einander gleich gesetzt werden können. Wir setzen zunächst die bereits bekannten Werte von y_0, $\delta y_{\frac{1}{2}}$, $\delta^2 y_0$, $\delta^3 y_{\frac{1}{2}}$ nebeneinander:

1,3863		– 0,0006215		
	0,02460		0,00003703.	

Hier können wir vor allem y_1 (d. h. den Wert von y für $x = 3{,}1$) berechnen, indem wir $\delta y_{\frac{1}{2}}$ zu y_0 addieren; wir erhalten 1,41090. Ferner können wir:

$$\delta^2 y_1 = \delta^2 y_0 + \delta^3 y_{\frac{1}{2}} = -0{,}0005845$$

und mit Hilfe dieses Wertes:

$$\delta y_{\frac{3}{2}} = \delta y_{\frac{1}{2}} + \delta^2 y_1 = 0{,}02402,$$

$$y_2 = y_1 + \delta y_{\frac{3}{2}} = 1{,}43492$$

berechnen; dann sieht die Tabelle so aus:

1,3863		– 0,0006215		
	0,02460		0,00003703	
1,41090		– 0,0005830		– 0,00000294.
	0,02402			
1,43492				

Weiter berechnen wir sukzessive:

$$\delta^3 y_{\frac{3}{2}} = \delta^3 y_{\frac{1}{2}} + \delta^4 y_1 = \quad 0{,}00003409,$$

$$\delta^2 y_2 = \delta^2 y_1 + \delta^3 y_{\frac{3}{2}} = -0{,}0005504,$$

$$\delta y_{\frac{5}{2}} = \delta y_{\frac{3}{2}} + \delta^2 y_2 = \quad 0{,}02347,$$

$$y_3 = y_2 + \delta y_{\frac{5}{2}} = \quad 1{,}45839$$

und tragen ein, so daß die Tabelle jetzt folgendermaßen aussieht:

1,3863		– 0,0006215		
	0,02460		0,00003703	
1,41090		– 0,0005845		– 0,00000294
	0,02402		0,00003409	
1,43492		– 0,0005554		– 0,00000294
	0,02347		0,00003115	
1,45839				

So fahren wir fort, indem wir, wie schon gesagt, allen vierten Differenzen einen und denselben Wert zuschreiben; wir erhalten zuletzt:

1,3863		— 0,0006215		
	0,02460		0,00003703	
1,41090		— 0,0005845		— 0,00000294
	0,02402		0,00003409	
1,43492		— 0,0005504		— 0,00000294
	0,02347		0,00003115	
1,45839		— 0,0005192		— 0,00000294
	0,02295		0,00002821	
1,48134		— 0,0004910		— 0,00000294
	0,02246		0,00002527	
1,50380		— 0,0004657		— 0,00000294
	0,02199		0,00002233	
1,52579		— 0,0004424		— 0,00000294
	0,02155		0,00001939	
1,54734		— 0,0004228		— 0,00000294
	0,02113		0,00001645	
1,56847		— 0,0004064		— 0,00000294
	0,02072		0,00001351	
1,58919		— 0,0003899		
	0,02032			
1,60951				

Der hier schließlich gefundene Wert von y für $x = 4$ sollte mit dem gegebenen, nämlich $y = 1{,}6094$ übereinstimmen; daß dies bis auf eine Einheit der vierten Dezimalstelle der Fall ist, ist eine Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung; eine größere Übereinstimmung kann nicht erwartet werden.

Dieselben Werte von y kann man auch noch auf andere Art berechnen, indem man von dem gegebenen Wert von y für $x = 4$ ausgeht, zu diesem die zugehörigen Werte der Differenzen sucht und dann die Tabelle nach oben ergänzt. Das gibt folgende Rechnung:

$$y_0 = 1{,}6094, \quad \Delta y_0 = 0{,}2027, \quad \Delta^2 y_0 = -0{,}0408, \quad \Delta^3 y_0 = 0{,}01825,$$

$$\Delta^4 y_0 = -0{,}0111, \quad \delta^4 y_0 = -0{,}00000111, \quad \delta^3 y_0 = 0{,}00001825,$$

$$\begin{array}{rlrl} \Delta^2 y_0 = & -0{,}0408 & \Delta y_0 = & 0{,}2027 \\ -\tfrac{1}{12}\Delta^4 y_0 = & +\underline{0{,}0009} & -\tfrac{1}{6}\Delta^3 y_0 = & -\underline{0{,}0030} \\ & -0{,}0399 & & 0{,}1997 \\ \delta^2 y_0 = & -0{,}000399 & \delta y_0 = & 0{,}01997 \end{array}$$

$$\delta y_{-\frac{1}{2}} = \delta y_0 - \tfrac{1}{2}\delta^2 y_0 = 0{,}02017$$

$$\delta^3 y_{-\frac{1}{2}} = \delta^3 y_0 - \tfrac{1}{2}\delta^4 y_0 = 0{,}0000188.$$

Von diesen Werten ausgehend erhalten wir:

1,38626				
	0,02474			
1,41100		− 0,000608		
	0,02413		0,0000276	
1,43513		− 0,000580		− 0,00000111
	0,02355		0,0000265	
1,45868		− 0,000553		− 0,00000111
	0,02300		0,0000254	
1,48168		− 0,000528		− 0,00000111
	0,02247		0,0000243	
1,50415		− 0,000504		− 0,00000111
	0,02197		0,0000232	
1,52612		− 0,000481		− 0,00000111
	0,02149		0,0000221	
1,54761		− 0,000459		− 0,00000111
	0,02103		0,0000210	
1,56864		− 0,000438		− 0,00000111
	0,02059		0,0000199	
1,58923		− 0,000418		− 0,00000111
	0,02017		0,0000188	
1,6094		− 0,000399		− 0,00000111.

Daß der Wert für $x = 3$ bis auf vier Einheiten der fünften Stelle sich richtig ergeben hat, ist wieder eine Kontrolle der Rechnung. Man sieht überhaupt, daß die beiden Tabellen in der Nähe der beiden äußersten Werte, die gegeben waren, sehr gut übereinstimmen, weniger in der Mitte: die beiden Werte für $x = 3{,}5$ differieren um 35 Einheiten der fünften Stelle. Wenn eine solche Abweichung nicht zulässig sein sollte, müßten wir im vorliegenden Falle auch noch die fünften Differenzen berücksichtigen.

Übrigens kann man sich ohne weiteres davon überzeugen, daß man merklich größere Abweichungen erhalten haben würde, wenn man die höheren Differenzen nicht auf eine größere Anzahl von Dezimalstellen berechnet hätte, als die gegebenen Funktionswerte. Andererseits hat es aber auch keinen Sinn, bei Berechnung der

Funktionswerte mehr Dezimalstellen mitzunehmen, wenn die gegebenen Funktionswerte nicht auf mehr Stellen als angegeben garantiert richtig sind; denn jeder Fehler der gegebenen Funktionswerte überträgt sich natürlich auf die aus ihnen berechneten. Es ist daher auch die fünfte Dezimalstelle der interpolierten Funktionswerte keineswegs als irgendwie garantiert anzusehen; doch empfiehlt es sich, sie mitzunehmen, um nicht etwa durch ihre Weglassung die Fehler noch mehr zu vergrößern.

§ 60. Interpolation auf Grund von überzähligen Beobachtungen.

Wir hatten bisher angenommen, daß die Interpolationsformel, durch die wir ein System von Beobachtungen zusammengehöriger Werte von zwei Variabeln wiedergeben wollen, ebensoviele unbestimmte Koeffizienten enthält, als Beobachtungen vorliegen, so daß man auf ein System von ebensoviel Gleichungen geführt wird als Unbekannte vorhanden sind. Man wird aber häufig wünschen, zugleich größere Sicherheit zu erzielen und den Einfluß der unvermeidlichen Beobachtungsfehler zu vermindern dadurch, daß man eine größere Anzahl von Beobachtungen anstellt, als man Koeffizienten in die Interpolationsformel aufnehmen will. Das nächstliegende würde dann sein, daß man aus den Beobachtungen eine Anzahl auswählt, etwa diejenigen, die das größte Vertrauen zu verdienen scheinen, diese durch eine Interpolationsformel darstellt und nun nachträglich prüft, ob die Formel auch die anderen, zu ihrer Berechnung nicht verwendeten Beobachtungen richtig liefert. Ist das der Fall, so hat man ein Recht zu der Annahme, daß die gefundene Formel den Verlauf der Erscheinung wenigstens in demjenigen Intervall, über das die Beobachtungen verteilt sind, richtig wiedergibt. Aber wenn es nicht der Fall ist, so bleibt immer noch die Frage offen, ob man nicht mit einem wenig abgeänderten System von Koeffizienten auch die übrigen Beobachtungen gut hätte darstellen können, ohne daß deswegen zwischen den zuerst benutzten Beobachtungen und der Rechnung unzulässig große Differenzen sich ergeben würden. Man müßte also in einem solchen Falle die Rechnung mit einer anderen Auswahl aus den Beobachtungen wiederholen. Es entsteht daher die Frage, ob man sie nicht so einrichten kann, daß *alle* Beobachtungen benutzt werden, und daß man zugleich die beste

Darstellung der Beobachtungen erhält, die mit einer Formel von der angenommenen Gestalt überhaupt möglich ist.

Soll diese Frage beantwortet werden, so müssen wir uns erst darüber einigen, wann eine Darstellung von Beobachtungen durch eine Formel als „besser" angesehen werden soll als eine andere. Astronomen und Geodäten sind gewohnt, diejenige Darstellung als die beste anzusehen, für welche die Summe der „Fehlerquadrate", d. h. der Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten, am kleinsten ist; die Verfolgung dieses Prinzips führt jedoch auf so umfangreiche Rechnungen, daß ihre Anwendung nur da am Platze ist, wenn, wie es in den beiden genannten Wissenschaften der Fall zu sein pflegt, sehr genaue Beobachtungen vorliegen, so daß das Verlangen berechtigt ist, die Rechnung solle an Genauigkeit nicht hinter den Beobachtungen zurückstehen. Aber zwischen diesem Falle und dem anderen Extremum so unzuverlässiger Beobachtungen, daß es sich überhaupt nicht lohnt, viel Mühe auf ihre Berechnung zu verwenden, liegt eine große Anzahl von Fällen, in denen die Ausnutzung aller Beobachtungen nach einem einfacheren Verfahren als dem der „kleinsten Fehlerquadrate" möglich und zweckmäßig ist.

Handelt es sich um die Darstellung von Beobachtungen durch eine nur zweigliedrige Formel:

$$y = ax + b,$$

so empfiehlt sich häufig ein graphisches Verfahren: man trage die Beobachtungen in ein kartesisches Koordinatensystem ein und versuche dann eine gerade Linie so zu legen, daß sie möglichst nahe an allen den eingetragenen Punkten vorbeigeht. Natürlich ist dieses Verfahren nur anwendbar, wenn man sich mit der beim Zeichnen erreichbaren Genauigkeit zufrieden geben kann — was übrigens bei sehr vielen physikalischen Beobachtungen zutrifft —; aber auch in anderen Fällen kann es zu einer vorläufigen Bestimmung gebraucht werden, indem man dann nur noch die Abweichungen zwischen den Beobachtungen und den durch das graphische Verfahren gelieferten Werten der weiteren Rechnung unterwirft. Sind die Beobachtungen äquidistant, so kann man auch ihre Darstellung durch eine rationale ganze Funktion zweiten oder dritten Grades in dieser Weise ableiten, indem man wie in § 57 Glieder gerader und ungerader Ordnung voneinander trennt. In anderen Fällen kann ein von CAUCHY gelehrtes

Verfahren mit Vorteil Anwendung finden, das nicht so bekannt ist, als es verdient, daß aber überall da sich empfiehlt, wo die Beobachtungen zu gut sind, als daß man sich mit dem zu Anfang genannten rein empirischen Verfahren begnügen möchte, und doch nicht so gut, daß die Anwendung der Methode der „kleinsten Fehlerquadrate“ sich lohnen würde.

Wir wollen das Verfahren an einem speziellen Beispiel kennen lernen. Es seien sechs Beobachtungen vorgelegt, und es handle sich darum, diese Beobachtungen durch eine rationale ganze Funktion von möglichst niedrigem Grade darzustellen; es ist einer der Vorteile des Verfahrens, daß man die Anzahl der Glieder, die zu berücksichtigen sind, nicht vor Beginn der Rechnung festzusetzen braucht. Es handelt sich dann um die Auflösung der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} a - 2b + 4c - 8d + \ldots &= 0{,}94084 \\ a - b + c - d + \ldots &= 0{,}95508 \\ a &= 0{,}96887 \\ a + b + c + d + \ldots &= 0{,}98223 \\ a + 2b + 4c + 8d + \ldots &= 0{,}99520 \\ a + 3b + 9c + 27d + \ldots &= 1{,}00779. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir müssen vor allem dafür sorgen, daß die Zahlenfaktoren derjenigen Unbekannten, die wir zuerst bestimmen wollen, alle positiv sind, indem wir erforderlichenfalls in einzelnen der Gleichungen alle Vorzeichen ändern; in unserm Falle ist das nicht erst nötig, wenn wir mit der Bestimmung von a beginnen wollen. Wir addieren dann zunächst alle Gleichungen; das gibt hier:

$$6a + 3b + 19c + 27d + \ldots = 5{,}85001. \tag{2}$$

Nun betrachten wir denjenigen Wert von a, der sich hieraus ergibt, wenn wir alle übrigen Unbekannten durch Null ersetzen, als eine erste Annäherung a_1; wir setzen also:

$$6a_1 = 6a + 3b + 19c + 27d + \ldots \tag{3}$$

das heißt:

$$a_1 = 0{,}97500. \tag{4}$$

Weiter setzen wir, indem wir das Zeichen Δ in einer anderen Bedeutung als in § 59 gebrauchen:

$$y - a_1 = \varDelta y \tag{5}$$

und führen an Stelle von x, $x^2 \ldots$ neue Hilfsfunktionen $\varDelta v$, $\varDelta w \ldots$ durch die Gleichungen:

$$\varDelta v = x - \frac{\Sigma x}{6}, \quad \varDelta w = x^2 - \frac{\Sigma x^2}{6}, \ldots \tag{6}$$

ein, in denen Σx, $\Sigma x^2 \ldots$ die Summen aller vorkommenden Werte von x, von $x^2, \ldots$ bedeuten. In unserem Falle ist:

$$\Sigma x = 3, \quad \Sigma x^2 = 19, \ldots \text{ also } \varDelta v = x - \tfrac{1}{2}, \quad \varDelta w = x^2 - \tfrac{19}{6} \ldots \tag{7}$$

Die allgemeine Gleichung:

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots$$

geht dann über in:

$$a_1 + \varDelta y = a + b\,\varDelta v + b\,\frac{\Sigma x}{6} + c\,\varDelta w + c\,\frac{\Sigma x^2}{6} + \ldots$$

oder da

$$a_1 = a + b\,\frac{\Sigma x}{6} + c\,\frac{\Sigma x^2}{6} + \ldots$$

ist, in

$$\varDelta y = b\,\varDelta v + c\,\varDelta w + \ldots \tag{8}$$

Setzen wir darin für x, y und die aus ihnen abgeleiteten Funktionen die beobachteten, bzw. aus den Beobachtungen berechneten Werte, so erhalten wir ein zweites Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
- \tfrac{5}{2}b + \tfrac{5}{6}c + \ldots &= - 0{,}03416 \\
- \tfrac{3}{2}b - \tfrac{13}{6}c + \ldots &= - 0{,}01992 \\
- \tfrac{1}{2}b - \tfrac{19}{6}c + \ldots &= - 0{,}00613 \\
+ \tfrac{1}{2}b - \tfrac{13}{6}c + \ldots &= + 0{,}00723 \\
+ \tfrac{3}{2}b + \tfrac{5}{6}c + \ldots &= + 0{,}02020 \\
+ \tfrac{5}{2}b + \tfrac{35}{6}c + \ldots &= + 0{,}03279.
\end{aligned} \tag{9}$$

Wir müssen dafür sorgen, daß hier die Faktoren von b alle positiv ausfallen, also in den drei ersten Gleichungen die Vorzeichen umkehren; wenn wir dann addieren, erhalten wir:

$$9b + 9c + \ldots \doteq 0{,}12043. \tag{10}$$

Wieder benutzen wir als Näherungswert b_1 von b denjenigen, der hieraus erhalten wird, wenn wir c, d, ... vernachlässigen, setzen also:

$$9b_1 = 9b + 9c + \ldots \tag{11}$$

oder:

$$b_1 = 0{,}01338. \tag{12}$$

Dem würde entsprechen, daß wir die Werte $b\Delta v$ als Näherungswerte für Δy betrachten; bezeichnen wir die Korrektur, die dann noch erforderlich ist, mit $\Delta^2 y$, setzen also:

$$\Delta y = b_1 \Delta v + \Delta^2 y, \tag{13}$$

und führen ferner die Bezeichnungen ein:

$$\Delta^2 w = \Delta w - \frac{\Sigma \Delta w}{\Sigma \Delta v} \Delta v, \ldots, \tag{14}$$

so geht die allgemeine Gleichung (8) über in:

$$b_1 \Delta v + \Delta^2 y = b \Delta v + c \frac{\Sigma \Delta w}{\Sigma \Delta v} \Delta v + c \Delta^2 w + \ldots$$

oder da

$$b_1 \qquad = b \qquad + c \frac{\Sigma \Delta w}{\Sigma \Delta v} \Delta v + \ldots$$

ist, in:

$$\Delta^2 y = \qquad\qquad\qquad c \Delta^2 w + \ldots \tag{15}$$

Dabei ist hier $\Delta_2 w = (x^2 - \frac{19}{6}) - (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x - \frac{8}{3}$. Setzen wir hier wieder die aus den Beobachtungen folgenden Werte ein, so erhalten wir als drittes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{10}{3} c + \ldots &= - 0{,}00061 \\ - \tfrac{2}{3} c + \ldots &= + 0{,}00015 \\ - \tfrac{8}{3} c + \ldots &= + 0{,}00056 \\ - \tfrac{8}{3} c + \ldots &= + 0{,}00054 \\ - \tfrac{2}{3} c + \ldots &= + 0{,}00013 \\ + \tfrac{10}{3} c + \ldots &= - 0{,}00079. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Summation mit Änderung der Vorzeichen der vier mittleren Gleichungen ergibt:

$$\frac{40c}{3} + \ldots = - 0{,}00278,$$

also als Näherung:

$$c = - 0{,}00021. \tag{17}$$

Die mit diesem Wert von c, unter Vernachlässigung der ferneren

Glieder berechneten Werte der linken Seiten der Gleichungen (16) sind noch bzw. um

$$-9, \quad -1, \quad 0, \quad 2, \quad 1, \quad -9$$

Einheiten größer als die rechten; wenn wir diese Differenzen Beobachtungsfehlern zuschreiben dürfen, können wir abbrechen und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}97500 + 0{,}01338\,(x - \tfrac{1}{2}) - 0{,}00021\,(x^2 - x - \tfrac{8}{3}) \\ &= 0{,}96887 + 0{,}01359\,x - 0{,}00021\,x^2 . \end{aligned}$$

Achter Abschnitt.

Rechnen mit Differentialien (unendlich kleinen Größen).

§ 61. Allgemeine Definitionen und Sätze.

Blicken wir noch einmal auf die Ableitung der fundamentalen Sätze der Differentialrechnung im zweiten und dritten Abschnitte zurück, so sehen wir, daß im Grunde überall das folgende Verfahren angewendet worden ist: die unabhängige Variable x wurde durch $x + h$ ersetzt; dann wurde der vorgelegte Ausdruck nach Potenzen von h geordnet und die Division mit h ausgeführt; nach Ausführung der Division wurde $h = 0$ gesetzt. Dabei fielen immer am Schlusse der Rechnung eine größere oder geringere Anzahl von Gliedern weg, die vorher hatten mitgeführt werden müssen. Es entsteht daher die Frage: können wir nicht solche Rechnungen dadurch vereinfachen, daß wir uns vor Beginn der Rechnung überlegen, welche Glieder auf das Resultat Einfluß haben und welche schließlich wegfallen werden, und daß wir dann nur die ersteren mitnehmen, die letzteren aber gleich zu Anfang weglassen. Wir gelangen zur Bejahung dieser Frage mit Hilfe der folgenden Definitionen und Sätze:

1. Definition: *Eine Größe, die am Schlusse einer Rechnung gleich Null gesetzt werden soll, heißt eine unendlich kleine Größe.*

Man kann also mathematisch niemals sagen: „diese oder jene Größe *ist* unendlich klein“, sondern nur „wir behandeln sie für die Zwecke der Rechnung, die wir gerade anstellen, als unendlich klein“. Welche Größen wir als unendlich klein behandeln wollen, das können wir, solange wir uns im Gebiete der reinen Analysis bewegen, willkürlich verabreden; in ihren Anwendungen ist es durch die Natur der Aufgabe gegeben.

2. Satz: *Das Produkt aus einer unendlich kleinen Größe und einer Größe, die für* $h = 0$ *endlich bleibt, ist selbst eine unendlich kleine Größe.*

Der Satz ist eigentlich eine selbstverständliche Folge des elementaren Satzes, daß ein Produkt, dessen einer Faktor Null ist, selbst Null ist: wenn wir am Schlusse einer Rechnung $h = 0$ setzen, so müssen wir auch $hf(h)$ gleich Null setzen, sobald $f(0)$ überhaupt einen endlichen bestimmten Wert hat. Wenn wir ihn ausdrücklich als Lehrsatz formulieren, so geschieht es hauptsächlich, um auf die Notwendigkeit der zugefügten Bedingung hinzuweisen, die sonst leicht übersehen wird. Z. B. ist

$$\frac{h}{e^h - e^{-h}}$$

keine unendlich kleine Größe, wenn h eine solche ist; denn für $h = 0$ wird auch der Nenner gleich Null.

3. Satz: *Summe, Differenz, Produkt zweier unendlich kleiner Größen sind selbst unendlich klein.*

Nicht dasselbe gilt vom Quotienten zweier unendlich kleiner Größen. Um hier die Verhältnisse übersichtlich aussprechen zu können, beginnen wir mit der

4. Definition: *Zwei unendlich kleine Größen, deren Quotient endlich und von Null verschieden bleibt, heißen unendlich klein von derselben Ordnung.*

Z. B. sind, wenn h eine unendlich kleine Größe ist, $h^2 + h^3$ und $h^2 + h^4$ unendlich kleine Größen derselben Ordnung; denn ihr Quotient:

$$\frac{h^2 + h^3}{h^2 + h^4} = \frac{1 + h}{1 + h^2},$$

geht in 1 über, wenn $h = 0$ gesetzt wird, bleibt also endlich und von Null verschieden.

Dieser Definition gemäß hat es nur dann Sinn, zwei unendlich kleine Größen hinsichtlich der Ordnung ihres Unendlichkleinwerdens miteinander zu vergleichen, wenn die eine von der andern, oder beide von einer dritten Größe abhängen. Haben h und k gar keine notwendige Beziehung zueinander, so kann man über den Wert des Quotienten h/k, wenn h und k gleich Null werden, gar nichts aussagen.

Zur wirklichen Ausführung der Vergleichung zweier unendlich kleinen Größen hinsichtlich ihrer Ordnung reichen die in den vorangehenden Abschnitten gelehrten Methoden dann und nur dann aus, wenn die eine entweder eine rationale Funktion der andern ist oder auf Grund der Sätze von § 42—44 näherungsweise durch eine solche Funktion dargestellt werden kann.

Sind zwei voneinander abhängige unendlich kleine Größen h und k nicht von derselben Ordnung unendlich klein, so wird entweder h/k oder k/h gleich Null, wenn h und k gleich Null gesetzt werden.

5. Definition: *Wenn man verabredet, daß eine bestimmte unendlich kleine Größe als „unendlich klein von der ersten Ordnung" angesehen werden soll, so sagt man, die Potenz h^n heißt von der n^{ten} Ordnung unendlich klein; und dann heißt auch jede Größe von der n^{ten} Ordnung unendlich klein, die von derselben Ordnung unendlich klein ist wie h^n.*

Z. B. geht aus den Formeln von § 44 hervor: wenn h von der ersten Ordnung unendlich klein ist, ist $e^h - e^{-h}$ von der ersten, $e^h + e^{-h} - 2$ von der zweiten, $e^h - e^{-h} - 2h$ von der dritten Ordnung unendlich klein.

Die Ordnung des Unendlichkleinwerdens einer Größe ist der Definition (5) zufolge ein *relativer* Begriff: wir können immer eine beliebige der in der Rechnung vorkommenden Größen als unendlich klein von der ersten Ordnung bezeichnen. Ist aber eine solche Wahl getroffen, so sind damit auch die Ordnungszahlen aller übrigen in der Rechnung vorkommenden unendlich kleinen Größen festgelegt, soweit diesen Größen im Vergleich mit der ersteren überhaupt bestimmte Ordnungszahlen zukommen. Denn es ist wohl zu beachten, daß keineswegs jede unendlich kleine Größe in Bezug auf eine andere eine bestimmte Ordnungszahl zu haben braucht. Z. B. ist, wenn h eine unendlich kleine Größe ist, auch $\frac{1}{\log h}$ eine solche; aber aus der Formel (9) von § 55 geht hervor, daß ihr keine bestimmte Ordnungszahl zugeschrieben werden kann, wenn h als unendlich kleine Größe erster Ordnung definiert wird.

6. Definition: *Eine Gleichung zwischen zwei Polynomen, in welchen unendlich kleine Größen verschiedener Ordnung vorkommen, hat folgenden Sinn: man soll mit einer derjenigen Größen, die die niedrigste Ordnungszahl haben, — nennen wir sie h — dividieren, dann die Quotienten zweier unendlich kleiner Größen derselben Ordnung durch ihre endlichen Werte ersetzen und h gleich Null setzen.*

Dabei fallen alle diejenigen Glieder weg, die vorher unendlich kleine Größen höherer Ordnung als die niedrigste vorkommende enthalten hatten; wir hätten also diese Größen von Anfang an nicht mitzunehmen brauchen. Daher ergibt sich die

7. *Regel: In einem Polynom dürfen neben unendlich kleinen Größen bestimmter Ordnung solche höherer Ordnung weggelassen werden.*

8. Wenn man bei Anwendung der Regel (7) auf eine Gleichung der Form $0 = 0$ kommt, so kann das sehr verschiedene Bedeutungen haben: es kann entweder heißen: die Voraussetzungen sind erfüllt; oder: die Aufgabe wird nicht nur durch bestimmte Werte einer Unbekannten gelöst, sondern durch beliebige Werte; oder: auf dem eingeschlagenen Wege ist kein Resultat zu erhalten. *Um zu entscheiden, welche von diesen Möglichkeiten im einzelnen Falle vorliegt, muß man in der Rechnung zurückgehen und unendlich kleine Größen der nächst höheren Ordnung mitnehmen.*

Auf andere als rationale ganze Funktionen darf die Regel (7) nicht ohne besondere Vorsicht angewendet werden. Z. B. würde man zu einem falschen Resultate gelangen, wenn man sagen wollte: in

$$\frac{\sqrt{h+h^2}-\sqrt{h}}{\sqrt{h^3}}$$

darf im Zähler h^2 gegen h vernachlässigt werden; der Zähler wird dann 0 und also auch der ganze Bruch. Vielmehr muß man sich in solchen Fällen der MACLAURINschen Formel, bzw. einer der speziellen aus ihr abgeleiteten Formeln bedienen, um die vorgelegte Funktion durch eine rationale ganze Funktion näherungsweise zu ersetzen. In dem angeführten Beispiel hat man:

$$\sqrt{h+h^2} = \sqrt{h}\cdot\sqrt{1+h} \sim \sqrt{h}\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

$$\sqrt{h+h^2}-\sqrt{h} \sim \tfrac{1}{2}\sqrt{h^3}$$

$$\frac{\sqrt{h+h^2}-\sqrt{h}}{\sqrt{h^3}} \sim \tfrac{1}{2}.$$

Sollen die vorstehenden Sätze und Definitionen in der Differentialrechnung gebraucht werden, so ist es zweckmäßig, ihnen noch einige beizufügen, die speziell auf diese Verwendung Bezug haben.

9. *Soll eine unabhängige Variable x um eine unendlich kleine Größe vermehrt werden, so nennt man diese unendlich kleine Größe „das Differential von x“ und bezeichnet sie mit dx, (was nicht als ein Produkt, sondern wie ein einziges Zeichen anzusehen ist).*

10. *Vermehren wir x um dx, so bezeichnen wir die zugehörige Vermehrung irgend einer Funktion y von x mit dy.*

11. *Definition: Wenn dy mit dx zugleich unendlich klein wird, so heißt y eine stetige Funktion von x.*

Wir haben den Ausdruck „stetig“ schon öfter gebraucht, dabei aber an geometrische Anschauung appelliert. Hier haben wir eine analytische Definition.

12. *Definition: Solange nicht ausdrücklich etwas anderes verabredet ist, soll das Differential der unabhängigen Variabeln als unendlich kleine Größe erster Ordnung gelten.*

13. *Definition: Eine Funktion, deren Differential eine unendlich kleine Größe erster Ordnung ist, heißt differentiierbar.*

§ 62. Rekapitulation früherer Formeln durch Rechnen mit unendlich kleinen Größen.

Wir wollen nun eine Anzahl der früheren Formeln wieder vornehmen, um zuzusehen, wie sich ihre Herleitungen einfach darstellen lassen, wenn man sich der im vorigen Paragraphen eingeführten Ausdrucksweise bedient.

Vor allem ist zu sehen: *Wenn eine Funktion einen bestimmten von Null verschiedenen Differentialquotienten hat, so ist ihr Differential eine unendlich kleine Größe erster Ordnung.* Denn nach dem Taylorschen Satz ist bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung

$$f(x + dx) \sim f(x) + f'(x)\, dx,$$

also

$$dy = f'(x)\, dx$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

d. h. der Quotient der Differentialien einer abhängigen und einer unabhängigen Variablen ist gleich dem Differentialquotienten der ersteren genommen nach der letzteren, wie er in § 13 definiert worden ist. Daher stammt auch der Name „Differentialquotient“. Wir können dann vor allem den Satz aussprechen:

Das Differential einer Konstanten ist gleich Null (unendlich klein von beliebig hoher Ordnung).

Als weiteres Beispiel des Rechnens mit Differentialien statt mit Differentialquotienten möge etwa die Funktion

$$y = x^2$$

differentiiert werden. Wir erhalten zunächst:

$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\, dx + (dx)^2.$$

Hier hebt sich y beiderseits weg; $(dx)^2$ ist eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung, kann also neben den stehenbleibenden unendlich kleinen Größen erster Ordnung weggelassen werden, und es bleibt einfach:

$$dy = 2x\,dx.$$

Zu beachten ist bei dieser Rechnung, daß sie nichts darüber voraussetzt, ob dy überhaupt eine unendlich kleine Größe ist, und von welcher Ordnung; das ergibt sich vielmehr aus der Schlußformel. Es ist im allgemeinen in der Tat eine unendlich kleine Größe erster Ordnung, nur nicht für $x = 0$. Bei $x = 0$ fallen nämlich rechts die unendlich Kleinen erster Ordnung von selbst weg, und wir müssen also gemäß der Regel diejenigen zweiter Ordnung mitnehmen. Wir erhalten dann:

$$dy = (dx)^2,$$

also ist bei $x = 0$ das dy in der Tat eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung.

Ist ferner

$$y = \frac{1}{x}$$

vorgelegt, so ergibt sich:

$$y + dy = \frac{1}{x + dx} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1 + \frac{dx}{x}}.$$

Es ist aber, wenn

$$\frac{1}{1 + \frac{dx}{x}} = 1 - \frac{dx}{x} + \varepsilon$$

gesetzt wird,

$$\varepsilon\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \left(\frac{dx}{x}\right)^2$$

und somit ε eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung; also folgt bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung:

$$y + dy = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{dx}{x}\right)$$

und damit:

$$dy = -\frac{dx}{x^2}.$$

Dasselbe Resultat kann man auch folgendermaßen erhalten:

$$xy = 1$$

$$(x + dx)(y + dy) = 1,$$

also durch Subtraktion:

$$x\,dy + y\,dx + dx\,dy = 0.$$

Nun ist, wenn wir den Fall beiseite lassen, daß x oder $y = 0$ ist, y hier eine stetige Funktion von x, also dy mit dx zugleich unendlich klein. Dann ist aber das Produkt $dx\,dy$ von höherer Ordnung unendlich klein, als jeder seiner beiden Faktoren; es kann also gegenüber den beiden anderen Gliedern weggelassen werden, und es bleibt:

$$x\,dy = -y\,dx;$$

so daß also dy auch hier, von den vorhin schon ausgeschlossenen Fällen abgesehen, eine unendlich kleine Größe derselben Ordnung wie dx ist.

Die Regeln für die Differentiation eines Produkts und eines Quotienten können in entsprechender Weise behandelt werden:

$$y = uv,\ y + dy = (u + du)(v + dv),\ dy = u\,dv + v\,du.$$

$$y = \frac{u}{v},\ vy = u,\ v\,dy + y\,dv = du,\ dy = \frac{du}{v} - \frac{y\,dv}{v} = \frac{du}{v} - \frac{u\,dv}{v^2}.$$

Die Regeln von § 22 und von § 24 ergeben sich bei dieser Art die Sache zu behandeln unmittelbar: man muß nur beachten, daß dx, dy, dz, die jetzt für sich genommen eine Bedeutung haben, überall zusammengehörige Inkremente von x, y, z vorstellen.

Das Rechnen mit solchen unendlich kleinen Größen ist namentlich dann bequem, wenn es sich um den *Ansatz* von Problemen der Geometrie, der Mechanik u.s.w. handelt, indem es erlaubt, schon im Ansatz Glieder wegzulassen, die auf das Resultat doch keinen Einfluß ausüben würden. Man muß nur natürlich sorgfältig darauf achten, ob die Größen, die man vernachlässigt, wirklich unendlich klein von höherer Ordnung als die beibehaltenen sind.

§ 63. Höhere Differentialien.

Wir hatten aus der Gleichung:

$$y = f(x)$$

die folgende

$$y + dy = f(x + dx)$$

dadurch erhalten, daß wir x um dx wachsen ließen und mit dy dann den entsprechenden Zuwachs von y bezeichneten. Lassen wir nun x noch einmal um *dasselbe* dx wachsen, so wird sich doch y im allgemeinen nicht um dasselbe dy vermehren, sondern um eine Größe, die sich um ein unendlich kleines (zweiter Ordnung, wie wir nachher sehen werden) von dy unterscheidet. Wir bezeichnen dieses unendlich kleine mit d^2y, schreiben also:

$$y + dy + (dy + d^2y) = f(x + 2dx)$$

oder:

$$d^2y = f(x + 2dx) - 2f(x + dx) + f(x).$$

Andererseits ist aber nach der TAYLORschen Formel bis auf Glieder dritter Ordnung:

$$f(x + dx) = f(x) + dx \cdot f'(x) + \frac{dx^2}{2} f''(x),$$

und ebenso:

$$f(x + 2dx) = f(x) + 2dx f'(x) + 2dx^2 f''(x).$$

Setzen wir ein und reduzieren, so bleibt:

$$d^2y = f''(x)\, dx^2.$$

Dadurch ist gezeigt, daß das hier auftretende d^2y in der Tat eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist; andererseits ist aber damit auch die Entstehung der Schreibweise

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

für den zweiten Differentialquotienten erklärt.

Wir müssen aber hier ein Bedenken noch erledigen: Bei der Bildung von dy haben wir unendlich kleine Größen von höherer als der ersten Ordnung weggelassen; müssen wir sie nicht noch nachträglich mitnehmen, wenn wir den gefundenen Wert von dy in Ausdrücke einsetzen wollen, die schließlich nur Größen zweiter Ordnung enthalten? Darauf ist zu sagen: Das d^2y kommt zu stande, indem wir zwei Werte von dy voneinander subtrahieren. Würden wir im Ausdruck von dy Glieder zweiter Ordnung mitgenommen haben, so würden diese in der Differenz der beiden dy nur zu Gliedern dritter

Ordnung Veranlassung gegeben haben, die wir weglassen konnten, wenn Glieder zweiter Ordnung stehen bleiben.

In derselben Weise wie die zweiten können wir auch noch höhere Differentialien bilden. Dabei setzen wir voraus, daß die verschiedenen Inkremente dx, die zu x nacheinander hinzugefügt werden, alle einander gleich sind. Man drückt das wohl so aus: das Differential der unabhängigen Veränderlichen ist konstant, ihre höheren Differentialien also Null.

Man kann diesen Satz auch umdrehen und ihn in der Form:

Unabhängig heißt diejenige Variable, deren Differential als konstant behandelt wird

als Definition der „unabhängigen Variabeln" ansehen.

Eine Folge davon ist, daß man beim Rechnen mit *ersten* Differentialien sich überhaupt nicht zu entscheiden braucht, welche Variable man als die unabhängige ansehen will. Sobald man aber mit höheren Differentialien zu tun bekommt, muß man darüber Entscheidung treffen.

Die in § 40 erwähnte Regel für die Bildung der zweiten (und höheren) Ableitungen eines Produkts ergibt sich beim Rechnen mit Differentialien sehr einfach:

$$y = uv,$$

$$dy = u\,dv + v\,du,$$

$$d^2y = (u\,d^2v + du\,dv) + (v\,d^2u + dv\,du) = u\,d^2v + 2\,du\,dv + v\,d^2u.$$

Auch die früher nicht erwähnte Regel für die zweite Differentiation einer Funktion von einer Funktion können wir einfach gewinnen. Wir haben zunächst:

$$y = f(z), \qquad z = \varphi(x)$$

$$dy = f'(z)\,dz, \quad dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Wollen wir jetzt noch einmal differentiieren, so müssen wir beachten, daß z nicht unabhängige Veränderliche ist, daß also dz nicht als konstant behandelt werden darf, sondern mit differentiiert werden muß. Das gibt:

$$d^2y = f''(z)\,dz^2 + f'(z)\,d^2z, \quad d^2z = \varphi''(x)\,dx^2,$$

also schließlich:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(z)\,\varphi'(x)^2 + f'(z)\,\varphi''(x).$$

Man sieht hier sehr deutlich, daß die Bezeichnung d^2y erst dann einen bestimmten Sinn bekommt, wenn festgesetzt ist, welche Variable als unabhängig veränderlich behandelt werden soll.

§ 64. Vertauschung der Variablen.

Manchmal stellt es sich im Laufe einer Rechnung als zweckmäßig heraus, die Rolle der unabhängigen Variablen derjenigen, die sie zuerst spielte, wegzunehmen und einer anderen zuzuweisen. Wenn man dann nicht die ganze Rechnung noch einmal vornehmen will, bedarf man Formeln, die von den Differentialquotienten nach der einen Variablen, — nicht nur dem ersten, sondern auch den höheren —, zu denjenigen nach der anderen überzugehen erlauben. Man gelangt zu diesen Formeln am bequemsten, wenn man mit Differentialien rechnet, und dabei zunächst gar nicht eine derjenigen Variabeln, mit denen man zu tun hat, zur unabhängigen Variabeln wählt, sondern sie alle als Funktionen einer neu eingeführten Hilfsvariabeln t ansieht, die man nachher nach Belieben mit einer oder der anderen der Variabeln identifizieren kann. Man kann ja überhaupt eine analytische Darstellung der Abhängigkeit zwischen zwei Variablen x, y immer in der Weise geben, daß man sie beide durch eine Hilfsgröße t ausdrückt und als zusammengehörig nun solche Werte von x und y ansieht, die zu demselben t gehören. Z. B. kann die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

zwischen x und y dadurch erfüllt werden, daß man

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \tag{2}$$

setzt. Man kann das so auffassen, daß ein materieller Punkt zur Zeit t die Koordinaten

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{3}$$

haben soll; leitet man aus diesen Gleichungen eine Gleichung zwischen x und y ab, die t nicht mehr enthält, so stellt diese letztere eine Kurve dar, auf der der betrachtete Punkt zu jeder Zeit sich

befindet, d. h. sie stellt die Bahnkurve des Punktes dar. Wir haben dann zunächst:

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt; \tag{4}$$

und zwar gelten diese Gleichungen, welches auch die Unabhängige sein mag. Wollen wir zu höheren Differentialien übergehen, so ist es zweckmäßig, zunächst überhaupt noch keine Verfügung darüber zu treffen, sondern die höheren Differentialien aller drei Variabeln x, y, t in der Rechnung mitzuführen; die so erhaltenen Formeln gelten dann bei jeder Wahl der unabhängigen Variablen und können nachträglich für jede solche spezielle Wahl eingerichtet werden. Wir erhalten so zunächst:

$$d^2x = \varphi''(t)\,dt^2 + \varphi'(t)d^2t, \quad d^2y = \psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2t. \tag{5}$$

Wenn *erstens* t als unabhängige Variable gewählt wird, ist in diesen Gleichungen $d^2t = 0$ zu setzen; sie stellen dann einfach die Beziehungen zwischen den höheren Differentialien und den höheren Differentialquotienten von x und y nach t vor. Soll aber *zweitens* x zur unabhängigen Variablen gewählt werden, so ist dafür zu sorgen, daß $d^2x = 0$ wird; das geschieht, indem man

$$d^2t = -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\,dt^2 \tag{6}$$

nimmt. Setzt man dann diesen Wert von d^2t in d^2y ein, so erhält man:

$$d^2y = \left(\psi''(t) - \frac{\psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)dt^2; \tag{7}$$

und wenn man auf gleichen Nenner bringt und dann mit dem aus (4) entnommenen Ausdruck von dx^2 dividiert:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}. \tag{8}$$

Soll endlich *drittens* y zur unabhängigen Variablen gemacht und die zweite Ableitung von y nach x berechnet werden, so braucht man in dieser Rechnung nur überall x mit y zu vertauschen; man erhält dann:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\varphi''(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi''(t)}{\psi'(t)^3}. \tag{9}$$

Will man nun den Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch die Ableitungen von x

nach y haben, so braucht man nur die beiden Gleichungen (8) und (9) miteinander zu verbinden und dann die Gleichungen (4) zu benutzen; man erhält:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 \tag{10}$$

und ebenso umgekehrt:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{d^2y}{dx^2} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3. \tag{11}$$

Als Beispiel mag behandelt werden:

$$x = t - t^3, \quad y = 1 - t^2$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 3t^2, \quad \frac{dy}{dt} = -2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6t \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2(1-3t^2) - 2t \cdot 6t}{(1-3t^2)^3} = \frac{-2-6t^2}{(1-3t^2)^3}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-2-6t^2}{8t^3} = \frac{-1-3t^2}{4t^3}.$$

Will man t eliminieren, so mag man etwa zunächst durch Division $\frac{x}{y} = t$ ableiten und diesen Wert in eine der beiden Gleichungen einsetzen; man erhält $y = 1 - \frac{x^2}{y^2}$ oder $x = \sqrt{y^2 - y^3}$ (während die Auflösung nach y die Behandlung einer Gleichung dritten Grades erfordern würde). Differentiation ergibt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\,\frac{2y - 3y^2}{\sqrt{y^2 - y^3}} = \frac{1 - \frac{3}{2}y}{\sqrt{1-y}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{1-y}} - \frac{1}{2}\,\frac{(1-\frac{3}{2}y)(-1)}{\sqrt{1-y}^3}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-y}^3}\left(-3(1-y) + 1 - \frac{3}{2}y\right) = \frac{-1 + \frac{3}{4}y}{\sqrt{1-y}^3}.$$

Setzen wir hier für y seinen Ausdruck durch t, so finden wir wieder den vorhin angegebenen Wert.

Neunter Abschnitt.

Funktionen von zwei Variabeln.

§ 65. Partielle Differentialquotienten.

Wir haben bisher immer nur den Fall untersucht, daß wir mit nur zwei veränderlichen Größen zu tun haben, zwischen denen irgend eine Beziehung besteht, so daß wir jede als Funktion der anderen ansehen konnten. Von diesem Fall ist derjenige nicht wesentlich verschieden, daß wir zwischen n veränderlichen Größen $n-1$ Gleichungen haben; denn dann können wir aus diesen Gleichungen andere ableiten, die nur je zwei von den Veränderlichen enthalten, und also alle Veränderlichen bis auf eine als Funktionen dieser letzten ansehen. Ist aber die Anzahl der Relationen um mehr als eine Einheit kleiner, als die der Variabeln, so kann man im allgemeinen wenigstens keine Gleichung aus ihnen ableiten, die nur zwei der Veränderlichen enthielte; es sind dann, wenn man nur den Wert der einen Veränderlichen vorschreibt, die Werte der übrigen damit noch nicht festgelegt.

Wir wollen uns hier nur mit dem einfachsten der möglichen Fälle beschäftigen, bei dem übrigens alles wesentliche schon zur Sprache kommen kann; dem Falle nämlich, daß zwischen drei veränderlichen Größen nur eine einzige Relation besteht. Einen solchen Fall bietet ein Gas dar. Der Zustand einer abgegrenzten Gasmenge kann durch Angabe von drei Größen geschildert werden: nämlich dem Volumen v, das die Gasmenge ausfüllt, ihrer absoluten Temperatur T, endlich dem Druck p (auf den Quadratzentimeter), den sie ausübt. Zwischen diesen Größen besteht eine Beziehung, die bei einem „idealen Gase“ durch das Gesetz (die Kombination der Gesetze von Boyle und Gay-Lussac):

$$pv = RT \tag{1}$$

gegeben ist, in der R eine (für die gegebene Gasmenge) konstante Größe bezeichnet; bei wirklichen Gasen hat das Gesetz eine kompliziertere Gestalt, auf die wir hier nicht einzugehen brauchen. Man kann von den drei Größen p, v, T nicht nur eine, sondern zwei nach Belieben variieren, z. B. gleichzeitig den Druck und die Temperatur erhöhen; die dritte ist aber dann durch die Gleichung (1) bestimmt. Wir drücken das so aus, daß wir sagen: von den drei Größen können in diesem Falle zwei als voneinander unabhängige Veränderliche, die dritte als eine Funktion von ihnen angesehen werden.

Bei abstrakt mathematischen Untersuchungen bezeichnen wir diejenigen beiden Veränderlichen, die wir als die unabhängigen ansehen wollen, lieber mit x und y, die von ihnen abhängige mit z. Wollen wir ausdrücken, daß z als Funktion von x und y angesehen werden soll, ohne doch über die Art dieser Abhängigkeit etwas spezielles anzugeben, so schreiben wir:

$$z = f(x, y); \tag{2}$$

das Komma zwischen x und y ist dabei erforderlich, wenn einer Verwechslung mit einer Funktion des Produkts xy vorgebeugt werden soll.

Wir fragen nun: welche Beziehungen bestehen zwischen den unendlich kleinen Änderungen der beiden Variabeln x, y und den zugehörigen Änderungen der Funktion z von ihnen? Um diese Frage allgemein zu beantworten, wollen wir zuerst zwei spezielle Fälle ins Auge fassen:

1. Wir ändern x um eine unendlich kleine Größe dx, lassen aber y ungeändert. z wird sich dann in denjenigen Fällen, mit welchen wir zu tun haben, ebenfalls um eine unendlich kleine Größe ändern. Wir nennen diese Größe *„das partielle Differential von z nach x“* und bezeichnen sie wohl mit

$$\partial_x z. \tag{3}$$

Dividieren wir sie noch mit dx, so erhalten wir *„den partiellen Differentialquotienten oder die partielle Ableitung von z nach x“*; man bezeichnet ihn mit

$$\frac{\partial z}{\partial x} \tag{4}$$

(mit rundem ∂ statt des geraden d des gewöhnlichen Differentialquotienten), indem man den Index x bei dem ∂z wegläßt, als wegen

des darunterstehenden Nenners selbstverständlich. Dieser partielle Differentialquotient kann also folgendermaßen definiert werden: man bilde erst den Differenzenquotienten:

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{5}$$

und sehe dann zu, was aus ihm wird, wenn man in ihm $\Delta x = 0$ setzt. Zur Bildung solcher partieller Differentialquotienten bedarf man keiner neuen Regeln: wie aus der Definition (5) hervorgeht, ist bei der Bildung des Differenzenquotienten für y im Minuenden derselbe Wert zu setzen, wie im Subtrahenden, mit anderen Worten, y ist wie eine Konstante zu behandeln. Wir wollen dieses Ergebnis doch ausdrücklich als Satz formulieren:

Soll eine Funktion der beiden Variabeln x, y nach einer von ihnen, x, partiell differentiiert werden, so ist so zu verfahren, wie wenn y eine Konstante und z eine Funktion von x allein wäre.

2. In ganz entsprechender Weise können wir auch die Frage behandeln, um wie viel z sich ändert, wenn wir x ungeändert lassen und nur y um eine unendlich kleine Größe dy ändern. Wir erhalten dann das partielle Differential $\partial_y z$ von z nach y und den entsprechenden partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left\{\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right\}_{\Delta y = 0.} \tag{6}$$

3. Endlich fragen wir, um wie viel sich z ändert, wenn wir gleichzeitig x um eine unendlich kleine Größe dx und y um eine ebenfalls unendlich kleine Größe dy ändern. Diese beiden unendlich kleinen Größen sind ganz voneinander unabhängig und willkürlich; wir können nicht sagen, daß die eine in Bezug auf die andere unendlich klein von der ersten oder überhaupt von einer bestimmten Ordnung sei. Aber eben, weil das an und für sich ganz willkürlich ist, können wir die Frage stellen: was tritt ein, wenn wir gleichzeitig x und y um zwei unendlich kleine Größen dx, dy vermehren, die beide von derselben Ordnung sind? Wir können sie dann beide als von der ersten Ordnung unendlich klein bezeichnen, da wir ja immer von einer unendlich kleinen Größe die Ordnungszahl willkürlich festsetzen können. Dann können wir verlangen, die zugehörige Änderung von z, die bei denjenigen Funktionen, mit denen wir hier zu tun haben, im allgemeinen wenigstens ebenfalls von der ersten Ordnung unendlich klein ist, bis auf

unendlich kleine Größen höherer Ordnung zu bestimmen. Das kann durch wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes (§ 41) geschehen, um uns dabei bequem ausdrücken zu können, wollen wir die Bezeichnungen:

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \tag{7}$$

benutzen. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy) - f(x + dx, y) &= f_2(x + dx, y)\, dy + dy^2 \\ &= f_2(x, y)\, dy + (dx.\, dy) + dy^2, \\ f(x + dx, y) - f(x, y) &= f_1(x, y)\, dx + dx^2, \end{aligned}$$

also bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung:

$$f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung nennt man *„das totale Differential der Funktion z"*. Zu beachten ist übrigens, daß bei der Ableitung des Satzes vom totalen Differential der Mittelwertsatz nicht allein auf die Funktion f, sondern auch auf die Funktion f_2 (oder auf die Funktion f_1) angewendet werden muß, daß also auch mindestens eine dieser Funktionen die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllen muß, wenn der Satz vom totalen Differential für die Funktion f Gültigkeit haben soll.

§ 66. Höhere Ableitungen von Funktionen zweier Variabeln.

Differentiieren wir die beiden ersten partiellen Ableitungen von z noch einmal nach x und nach y, so erhalten wir vier *zweite partielle Ableitungen*, die folgendermaßen bezeichnet zu werden pflegen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = f_{11}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = f_{12},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = f_{21}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = f_{22}.$$

Diese vier Ableitungen sind aber in denjenigen Fällen, mit welchen wir hier zu tun haben, nicht alle vier voneinander verschieden, sondern es ist:

$$f_{12} = f_{21}. \tag{1}$$

Man benutzt daher für diese Ableitungen das Zeichen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Der Beweis dieser Behauptung bietet keine Schwierigkeit, wenn $f(x+h,\ y+k)$ näherungsweise durch eine rationale ganze Funktion zweiten Grades von h und k ersetzt werden kann. Man erhält dann nämlich durch wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y+k) + hf_1(x, y+k) + \frac{h^2}{2} f_{11}(x, y+k) + (h^3) \qquad (2) \\ &= f(x, y) + kf_2(x, y) + \frac{k^2}{2} f_{22}(x, y) + (k^3) \\ &\quad + hf_1(x, y) + hkf_{12}(x, y) + (hk^2) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} f_{22}(x, y) + (h^2k) \\ &\quad + (h^3). \end{aligned}$$

Hätte man zuerst nach Potenzen von k und dann die einzelnen Glieder dieser Entwicklung nach Potenzen von h entwickelt, so würde man ganz dieselbe Formel erhalten haben, nur mit f_{21} an Stelle von f_{12}. Es folgt also:

$$hkf_{12}(x, y) - hkf_{21}(x, y) = (h, k)^3, \qquad (3)$$

wo $(h, k)^3$ eine Summe von Gliedern bezeichnet, die in Bezug auf h und k alle mindestens von der dritten Ordnung sind. Nehmen wir nun h und k beide als unendlich kleine Größen erster Ordnung, so müssen in der Gleichung (3) die Glieder niedrigster, nämlich zweiter, Ordnung für sich Null sein; das ist aber nur dann für alle beliebigen unendlich kleinen h und k der Fall, wenn

$$f_{12} = f_{21}$$

ist; w. z. b. w.

Sei z. B.

$$f(x, y) = \log(x+y) - \log(x-y),$$

so ist:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}, \\ f_2(x, y) &= \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \\ f_{11}(x, y) &= -\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2} \\ f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y) &= -\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \\ f_{22}(x, y) &= -\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}. \end{aligned}$$

§ 67. Implizite Differentiation.

Es kommt häufig vor, daß das Abhängigkeitsgesetz zwischen zwei Variabeln x und y in einer Form

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

gegeben ist, deren Auflösung nach x oder y überhaupt nicht möglich ist, oder auf unbequeme Ausdrücke führt. In derartigen Fällen wird man eine Methode zu haben wünschen, mit der man aus einer solchen Gleichung den Differentialquotienten von y nach x ableiten kann, ohne daß man nötig hat, vorher die Gleichung aufzulösen. Eine solche Methode läßt sich in der Tat aus den Entwicklungen von § 65 über die Differentiation von Funktionen von mehreren Variabeln ableiten. Denn wenn an den beiden Variabeln x und y immer nur solche zusammengehörige Änderungen angebracht werden sollen, daß dabei die Funktion $F(x, y)$ beständig gleich Null bleibt, so muß auch die Änderung dieser Funktion beständig gleich Null bleiben; es muß also für alle dieser Bedingung genügenden zusammengehörigen Werte von dx und dy das totale Differential

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \tag{2}$$

sein. Das können wir nun umkehren und sagen: zusammengehörige Werte von dx und dy sind hier dadurch definiert, daß sie der Gleichung (2) oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{3}$$

genügen müssen. Da der Quotient zusammengehöriger Differentiale von y und x den Differentialquotienten von y nach x liefert, so ist durch die Gleichung (3) die Bestimmung dieses Differentialquotienten ohne vorhergehende Auflösung der Gleichung (1) geleistet. Allerdings erhalten wir ihn auf diesem Wege ausgedrückt nicht wie in allen früheren Formeln durch x allein, sondern im allgemeinen durch x und y. Das schadet aber nichts; denn wenn wir z. B. in einem bestimmten Punkt einer Kurve die Tangente konstruieren wollen, so müssen wir doch erst diesen Punkt selbst haben, also seine beiden Koordinaten. Die Berechnung des y zu einem numerisch gegebenen x ist aber, wie wir in § 46 und 47 ge-

sehen haben, eine Aufgabe, die sich in vielen Fällen mit beliebiger Genauigkeit lösen läßt, auch wenn die allgemeine Auflösung für ein unbestimmt gelassenes x nicht gelingt.

Als Beispiel wollen wir eines behandeln, in dem die allgemeine Auflösung möglich ist, um die Resultate beider Verfahrungsweisen vergleichen zu können. Sei etwa:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

dann gibt die implizite Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Die Auflösung nach y ergibt

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

und daraus geht durch Differentiation nach x hervor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Um den ersten Ausdruck in den zweiten überzuführen, braucht man nur in den ersten den Ausdruck von y durch x einzusetzen.

Auch höhere Differentialquotienten von y nach x können wir auf diese Weise berechnen. Differentiieren wir die Gleichung (2) noch einmal, so erhalten wir zunächst:

$$(F_{11}\,dx + F_{12}\,dy)\,dx + F_1 d^2x + (F_{21}\,dx + F_{22}\,dy)\,dy + F_2 d^2y = 0;$$

behandeln wir x als unabhängige Variable und setzen demgemäß

$$d^2x = 0,$$

so ergibt sich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{F_2}\left\{F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

oder mit Rücksicht auf (2):

$$= -\frac{F_{11}F_2^{\,2} - 2F_{12}F_1F_2 + F_{22}F_1^{\,2}}{F_2^{\,3}}$$

usw.

§ 68. Funktionen von Funktionen zweier Veränderlichen.

Es sei eine veränderliche Größe z in der Weise Funktion von zwei anderen x, y, daß sie zunächst von zwei weiteren Größen u, v

abhängt, die ihrerseits wieder Funktionen von x und y sind — in Zeichen:

$$z = f(u, v), \quad u = \varphi(x, y), \quad v = \psi(x, y); \tag{1}$$

wie werden wir die Differentialquotienten von z nach x und y aus denjenigen von z nach u und v und denjenigen von u und v nach x und y berechnen können? Die entsprechende Frage für Funktionen von je einer Veränderlichen haben wir bereits in § 24 beantwortet; ein ähnliches Verfahren führt auch hier zum Ziele, am bequemsten, wenn wir mit den totalen Differentialien der vorkommenden Größen rechnen. Wir erhalten dann

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \\ dv &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

müssen uns aber, um nicht fehlzugehen, genau überlegen, was die vorkommenden Größen bedeuten. In der Gleichung (2) bedeuten du und dv willkürliche unendlich kleine Inkremente von u und v, dz bedeutet diejenige Änderung von z, die bewirkt wird, wenn wir u um dieses du und v um dieses dv ändern. In den Gleichungen (3) dagegen bedeuten dx und dy willkürliche Änderungen von x und y, und du, dv bedeuten diejenigen Änderungen von x und y, die eintreten, wenn wir an x und y gerade diese Änderungen anbringen. Es haben also du und dv zunächst in (2) eine allgemeinere Bedeutung als in (3); aber eben, weil die Bedeutung dort eine ganz allgemeine ist, die auch den speziellen Fall mit umfaßt, können wir mit Hilfe von (2) auch die Frage beantworten: wie ändert sich z, wenn wir an u und v gerade diejenigen Änderungen anbringen, die einer Änderung von x und y um dx und dy entsprechen? Wir erhalten nämlich durch Einsetzen und gehöriges Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dy. \end{aligned} \tag{4}$$

Andererseits aber entspricht doch einer Änderung von x und y um dx und dy eine Änderung von z um

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{5}$$

Sollen beide Ausdrücke übereinstimmen, welche Werte wir auch den voneinander unabhängigen Größen dx und dy beilegen mögen, so muß sein:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned} \tag{6}$$

Damit haben wir die gesuchten Ausdrücke der Ableitungen von z nach x und y durch die nach u und v gefunden; die Formel von § 24 erhalten wir als speziellen Fall, wenn wir annehmen, daß z nur von u und u nur von x abhängt, so daß $\frac{\partial z}{\partial v}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ gleich Null sind.

Ein besonderer Fall der Formeln für die Differentiation von Funktionen von Funktionen hat noch spezielles Interesse, der nämlich, daß man eine Größe, die ursprünglich als Funktion von zwei Variabeln u, v definiert war, ansehen will als Funktion von zwei Variabeln x und y, von denen die eine x mit u identisch, die andere y aber dadurch eingeführt ist, daß v einer Funktion von x oder u und y gleichgesetzt wird. In diesem Falle wird nicht etwa $\frac{\partial z}{\partial u}$ mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ identisch, sondern die Formeln (6) ergeben, da jetzt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{7}$$

ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \qquad \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned} \tag{8}$$

Will man in solchen Fällen von den beiden Zeichen x und u für dieselbe Größe das eine ersparen, so muß man, wenn von einem Differentialquotienten eines z nach x die Rede ist, jedesmal angeben, ob daneben v oder y als die andere unabhängige Variable betrachtet werden soll: man muß den Differentialquotienten nach x „bei konstantem y“ von dem „bei konstantem v“ unterscheiden, was vollständig durch eine Schreibweise wie

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=\text{const.}}, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{v=\text{const.}}$$

geschehen kann; kürzer, aber weniger vollständig dadurch, daß man etwa verabredet, der eine von diesen beiden Differentialquotienten solle immer in Klammern eingeschlossen werden.

Eine wichtige Anwendung finden diese Formeln, wenn es sich um Funktionen des Zustandes eines Gases handelt. Dieser Zustand ist, wie schon in § 65 angeführt, durch die drei Variabeln: Druck p, absolute Temperatur T und Volumen v definiert, zwischen denen aber die dort schon erwähnte Relation:

$$pv = RT \tag{9}$$

besteht, so daß wir von diesen drei Variabeln nur zwei als von einander unabhängig ansehen können. Irgend eine von dem Zustand der Gasmasse abhängige Größe, z. B. ihren Wärmeinhalt Q können wir dann ansehen entweder als Funktion von T und p, oder als Funktion von T und v. Einer kleinen Temperaturänderung dT entspricht dann eine kleine Änderung dQ des Wärmeinhalts: um die Temperatur um dT zu erhöhen, müssen wir dem Gase eine Wärmemenge dQ zuführen, die zu dT proportional, gleich $c\,dT$ ist. Den Faktor c, mit dem wir die zugeführte Temperaturerhöhung multiplizieren müssen, um die zu ihr erforderliche Wärmezufuhr zu erhalten, nennen wir die Wärmekapazität (*spezifische Wärme*) der Gasmasse; wir können sie nach dem vorhergehenden auch definieren als den partiellen Differentialquotienten des Wärmeinhaltes nach der Temperatur:

$$c = \frac{\partial Q}{\partial T}. \tag{10}$$

Aber diese Definition bekommt einen bestimmten Sinn erst dann, wenn wir angeben, welche Variable denn neben der Temperatur als unabhängige Variable aufgefaßt werden soll, der Druck oder das Volumen. An und für sich ist beides möglich: wir können ebensowohl von spezifischer Wärme *„bei konstantem Druck“*, als von spezifischer Wärme *„bei konstantem Volumen“* reden. Mit der ersteren haben wir zu tun, wenn wir während der Wärmezufuhr den Druck des Gases konstant erhalten, mit der letzeren, wenn wir das Volumen konstant erhalten. Die zwischen beiden bestehende Relation ergibt sich, wenn wir die erste Gleichung (8) in die hier gebrauchte Bezeichnung umschreiben; das gibt:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{p=\text{const.}} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{v=\text{const.}} + \left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_{T=\text{const.}} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=\text{const.}} \tag{11}$$

Hier ist zufolge Gleichung (9):

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p=\text{const.}} = \frac{R}{p}; \tag{12}$$

ferner ist bei einem vollkommenen Gase die Wärmemenge $d_v Q$, die ihm zugeführt werden muß, um sein Volumen bei konstanter Temperatur um dv zu vergrößern, gleich $p\,dv$, also:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial v}\right)_{T = \text{const.}} = p; \tag{13}$$

führen wir noch die üblichen Bezeichnungen der beiden spezifischen Wärmen ein, so geht die Gleichung (11) über in:

$$c_p - c_v = R, \tag{14}$$

die Differenz der beiden spezifischen Wärmen ist gleich der Konstante des Gasgesetzes. — Zu beachten ist, daß diese ganze Überlegung sich auf die Masseneinheit des Gases bezieht, und daß als Wärmeeinheit diejenige Wärmemenge gewählt ist, die der Arbeitseinheit äquivalent ist.

Zehnter Abschnitt.

Die trigonometrischen und die zyklometrischen Funktionen.

§ 69. Definition der trigonometrischen Funktionen.

Eine große Anzahl von Abhängigkeitsgesetzen, auch von solchen, die geometrisch oder mechanisch verhältnismäßig einfach definiert sind, lassen sich nicht mit den bisher allein benutzten Funktionszeichen ausdrücken. Dahin gehören namentlich alle diejenigen Abhängigkeitsgesetze, die zur Beschreibung *periodischer Erscheinungen* erforderlich sind, d. h. zur Beschreibung solcher Erscheinungen, die, wie die astronomischen und meteorologischen, sich nach Ablauf einer bestimmten Zeit (Periode) wiederholen. Auch die Erscheinungen des Schalles, des Lichtes, der elektrischen Wechselströme, der elektrischen Wellen weisen solche Periodizitäten auf; daß bei ihnen die Periode viel kürzer ist, macht für die mathematische Behandlung keinen Unterschied.

Wir brauchen daher zur Beschreibung solcher Erscheinungen eine andere Klasse von Funktionen als die bisher benutzten. Um solche einzuführen, wollen wir an ein spezielles Problem der Bewegungslehre (Kinematik) anknüpfen. Wir wollen uns vorstellen (Fig. 31 auf p. 215) ein Punkt P bewege sich auf einem Kreise, dessen Radius wir der Einfachheit wegen gleich der Längeneinheit annehmen wollen, mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Durch den Mittelpunkt des Kreises seien zwei zueinander rechtwinklige Koordinatenachsen gelegt, und nun seien mit dem Punkte P zwei andere Punkte Q und R so verbunden, daß der erste fortwährend auf der x-Achse, der zweite fortwährend auf der y-Achse bleibt, und daß außerdem die Verbindungslinie PQ fortwährend zur y-Achse, die Verbindungs-

linie PR fortwährend zur x-Achse parallel bleibt. Jeder dieser beiden Punkte wird dann auf seiner Achse eine hin und hergehende Bewegung vollführen, und zwar wird diese Bewegung periodisch sein, indem sie sich jedesmal wiederholt, sobald der Punkt P den Kreis ganz durchlaufen hat. Wir werden die Art, wie das x des Q und das y des R von der Zeit abhängen, als die einfachsten periodischen Abhängigkeitsgesetze ansehen und andere periodische Funktionen durch diese ausdrücken.

Zeichen für diese Abhängigkeitsgesetze sind bereits in der Trigonometrie eingeführt. Denn da wir den Kreisradius gleich 1 angenommen haben, so ist QP oder OR der Sinus, OQ oder RP der Kosinus des Winkels QOP. Dieser Winkel sollte sich aber in gleichen Zeiten immer um dieselbe Größe ändern; legen wir den Anfangspunkt der Zeitzählung in einen derjenigen Momente, in welchen der Punkt P die Halbachse der positiven x passiert, so ist der Winkel der Zeit selbst proportional und kann mit ωt bezeichnet werden, wenn der Proportionalitätsfaktor mit ω bezeichnet ist. Dann haben wir:

$$OQ = \cos \omega t, \quad OR = \sin \omega t;$$

und zwar gelten diese Gleichungen, — wie übrigens schon in § 10 auseinandergesetzt —, für alle Lagen des Punktes P auch dem Vorzeichen nach, da die Festsetzungen über die Vorzeichen der Koordinaten mit den Festsetzungen der Trigonometrie über die Vorzeichen der Funktionen Sinus und Kosinus harmonieren.

Dagegen empfiehlt es sich, in einer anderen Beziehung eine Abweichung von den Verabredungen der Trigonometrie eintreten zu lassen. Dort werden die Winkel in Gradmaß gemessen: als Einheit wird der rechte Winkel betrachtet, dieser wird in 90 Grade, der Grad in 60 Minuten geteilt. Für unsere Zwecke empfiehlt sich die Einführung einer anderen Winkeleinheit: *wir wollen denjenigen Winkel als einen Winkel Eins bezeichnen, der als Zentriwinkel im Kreise zu einem dem Radius gleichen Bogen gehört.*

Wie groß dieser Winkel ist, ergibt sich durch eine Proportion. Zu einem Bogen im Kreise vom Radius 1, dessen Länge gleich π ist, also zu einem Halbkreis, gehört als Zentriwinkel ein Winkel von zwei Rechten oder 180 Grad; bezeichnen wir mit α_1 die Anzahl der Grade, die zu unserem Einheitswinkel gehören, so muß die Proportion bestehen:

$$\alpha_1 : 180 = 1 : \pi.$$

Daraus ergibt sich:

$$\alpha_1 = \frac{180}{\pi}$$

oder näherungsweise bis auf Minuten genau:

$$\alpha_1 = 57^0\ 18'.$$

Ein Winkel, der in unserem neuen Maß, dem *Bogenmaß*, die Maßzahl x hat, ist also ein Winkel von

$$\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180^0$$

oder von

$$x \cdot 57^0\ 18'.$$

Umgekehrt: ein Winkel von α^0 hat im Bogenmaß die Maßzahl

$$\frac{\alpha \pi}{180} = 0{,}01745\,\alpha.$$

Zur Erleichterung solcher Umrechnungen findet sich in den meisten Logarithmentafeln ein Hilfstäfelchen, in dem einerseits die Vielfachen von 0,0174533, sowie die der entsprechenden Zahl 0,0002909 für einen Winkel von einer Minute, andererseits die Vielfachen von $57^0\ 17' = 3438'$ angegeben sind. Benutzt man eine solche Tafel, so verlangt die Umrechnung nur noch Additionen.

Soll z. B. ein Winkel von $14^0\ 24'$ (der Winkel des regelmäßigen 25-Ecks) in Bogenmaß ausgedrückt werden, so hat man die Rechnung:

$$\begin{array}{rl}
10^0 & = 0{,}17453 \\
4^0 & = 0{,}06981 \\
20' & = 0{,}00582 \\
4' & = 0{,}00116 \\
\hline
14^0\ 24' & = 0{,}25132.
\end{array}$$

Soll andererseits angegeben werden, wie viele Grade und Minuten ein Winkel hat, der in Bogenmaß $= 0{,}14286$ ist, so hat man die Rechnung:

$$\begin{array}{lr}
0{,}1 & = 343{,}78' \\
0{,}04 & = 137{,}51' \\
0{,}002 & = 6{,}88' \\
0{,}0008 & = 2{,}75' \\
0{,}00006 & = 0{,}21' \\
\hline
0{,}14286 & = 491{,}1' = 8^0\ 11{,}1'.
\end{array}$$

Wenn im folgenden etwa von $\sin x$ die Rede ist, so soll darunter immer der Sinus desjenigen Winkels zu verstehen sein, der im Bogenmaß durch die Zahl x gemessen wird. Z. B. ist $\sin 1$ der Sinus des Winkels von $57^0\,17,\,7'$, also sein Logarithmus gleich

$$9{,}92502\ (-10).$$

Unter Benutzung dieser Bezeichnung möge hier eine kleine Tabelle der trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus, und auch gleich der Tangente und Kotangente, Platz finden. Das Zeichen ∞ ist in ihr ebenso zu verstehen wie in § 20.

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\cot x$
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	∞
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
2π	0	1	0	∞

Auf Grund dieser Tabelle, bzw. einer ausführlicheren Tabelle der trigonometrischen Funktionen oder ihrer Logarithmen, erhält man für diese Funktionen die folgenden geometrischen Darstellungen durch Kurven, die auf ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem bezogen sind:

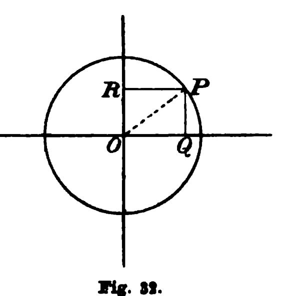


Fig. 32.

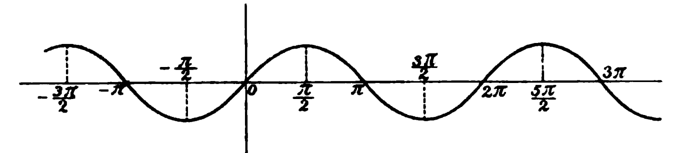


Fig. 33. $y = \sin x$

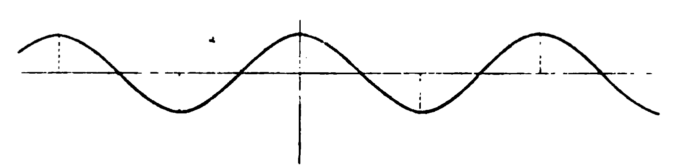


Fig. 34. $y = \cos x$

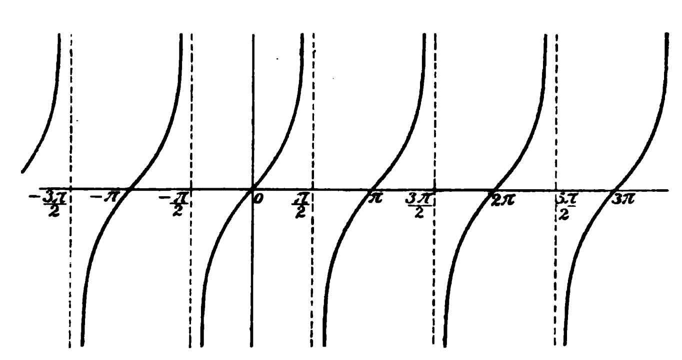


Fig. 35. $y = \operatorname{tg} x$

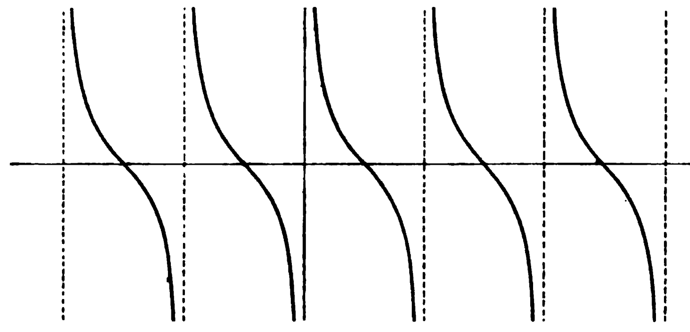


Fig. 36. $y = \cot x$

§ 70. Die Differentiation der Funktion Sinus.

Die Bestimmung des Differentialquotienten der Funktion $\sin x$ nach x bereiten wir durch die Ableitung eines Hilfssatzes vor, der in einer Doppelungleichung besteht. Wir fassen wieder den Einheitskreis ins Auge; einen Punkt P desselben verbinden wir mit dem Mittelpunkt O, der Winkel, den diese Verbindungslinie mit der x-Achse einschließt, sei mit x bezeichnet.

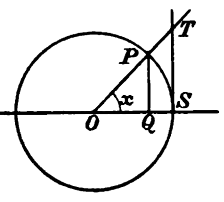


Fig. 37.

Im Schnittpunkt S der x-Achse mit dem Kreis ziehen wir an diesen die Tangente und bringen sie in T mit OP zum Schnitt. Dann zeigt die Figur, daß

$$\text{Dreieck } SOT > \text{Sektor } POS > \text{Dreieck } POQ$$

ist. Die Flächeninhalte dieser drei Figuren lassen sich nach Sätzen der Elementargeometrie ausdrücken; es ist:

$$\begin{aligned}\text{Dreieck } SOT &= \tfrac{1}{2} OS \cdot ST = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} x,\\ \text{Sektor } POS &= \tfrac{1}{2} OS \cdot SP = \tfrac{1}{2} x\\ \text{Dreieck } POQ &= \tfrac{1}{2} OQ \cdot OP = \tfrac{1}{2} \sin x \cos x,\end{aligned}$$

also ergibt sich:

$$\operatorname{tg} x > x > \sin x \cos x$$

oder:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > \cos x$$

oder endlich:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Nun sind für sehr kleine Winkel $\cos x$ und also auch $\frac{1}{\cos x}$ beliebig wenig von 1 verschieden; das Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$, das immer zwischen diesen beiden Werten liegt, ist also auch beliebig wenig von 1 verschieden. Für $x = 0$ ist dieses Verhältnis zunächst nicht definiert; wir werden aber ähnlich wie bei den analogen Untersuchungen von § 55 einen stetigen Anschluß an die übrigen Werte dieses Ver-

hältnisses erhalten, wenn wir ihm für $x = 0$ den Wert 1 zuschreiben. Wir drücken das aus durch:

$$\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}_{x=0} = 1$$

oder besser durch:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

die letztere Schreibweise soll eben ausdrücken, daß das Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$ *um so weniger* von 1 verschieden ist, *je kleiner* der Winkel x selbst ist.

Wollen wir nun von der Funktion $y = \sin x$ den Differentialquotienten nach x bilden, so bilden wir zunächst den Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Das können wir nach elementaren Formeln der Trigonometrie umformen in:

$$\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Lassen wir jetzt den Winkel h unter jede Grenze sinken, so sinkt umsomehr der Winkel $\frac{h}{2}$ unter jede Grenze; nach dem vorhin bewiesenen Hilfssatz nähert sich dabei das Verhältnis

$$\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

unbegrenzt der 1, und wir erhalten also:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Man sieht, daß wir hier genötigt gewesen sind, den Begriff des Differentialquotienten anders zu fassen, als es in § 13 geschehen war. Dort konnten wir ihn definieren als „das, was aus

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

wird, wenn man nach geeigneten Umformungen die Division mit h ausführt“. Hier können wir durch keine Umformung erreichen, daß die Division sich ausführen läßt; wir sind also genötigt, die Auf-

fassung der §§ 54, 55 zu Hilfe zu nehmen und die Definition in die Form zu bringen:

$$\frac{d f(x)}{dx} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

also *unter dem Differentialquotienten denjenigen Wert zu verstehen*, der sich bei $h = 0$ stetig an die für kleine positive oder kleine negative Werte von h vorhandenen Werte des Differenzenquotienten anschließt — vorausgesetzt, daß ein solcher Wert vorhanden ist. — Damals sah es aus (p. 12), als ob die Formel mehr könnte als der Verstand; jetzt sieht man, daß die Formel allein doch nicht alles kann.

§ 71. Die Differentiation der übrigen trigonometrischen Funktionen.

Nachdem die Regel für die Differentiation der Funktion $\sin x$ einmal abgeleitet ist, bietet die Differentiation der übrigen trigonometrischen Funktionen keine neuen Schwierigkeiten mehr. Die Regel für die Differentiation des Kosinus können wir entweder durch ein ganz analoges Verfahren ableiten, wie diejenige für die Differentiation des Sinus; oder wir können sie folgendermaßen auf die bereits abgeleitete zurückführen: Nach der Definition des Kosinus ist:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

also folgt:

$$\frac{d \cos x}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Die Differentiation von Tangens und Kotangens geschieht dann einfach mit Hilfe der Regel von § 19; diese liefert:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\cos x \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \frac{d \cos x}{dx}\right)$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$\frac{d \cot x}{dx} = \frac{1}{\sin^2 x}\left(\sin x \frac{d \cos x}{dx} - \cos x \frac{d \sin x}{dx}\right)$$
$$= \frac{1}{\sin^2 x}(-\sin^2 x - \cos^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln und der früheren allgemeinen Regeln kann nun eine beliebige Funktion differentiiert werden, die rational

aus x, Exponentialfunktionen, Logarithmen und trigonometrischen Funktionen aufgebaut ist; es wird genügen, wenn wir das eine oder andere Beispiel durchrechnen und für weitere auf die Aufgabensammlungen verweisen. Wir wollen uns dabei des Rechnens mit Differentialien bedienen.

$$d(x \sin x) = x\, d \sin x + \sin x\, dx = (x \cos x + \sin x)\, dx;$$
$$d(\sin 2x) = \cos 2x\, d(2x) = 2 \cos 2x\, dx$$

oder:

$$d(\sin 2x) = d(2 \sin x \cos x) = 2(\sin x\, d \cos x + \cos x\, d \sin x)$$
$$= 2(-\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx = 2 \cos 2x\, dx;$$
$$d \cos^2 x = 2 \cos x\, d \cos x = -2 \sin x \cos x\, dx = -\sin 2x\, dx;$$

oder:

$$d \cos^2 x = d \frac{1 + \cos 2x}{2} = \tfrac{1}{2} d \cos 2x = -\tfrac{1}{2} \cdot 2 \sin 2x\, dx = -\sin 2x\, dx;$$
$$d(e^x \sin x) = e^x\, d \sin x + \sin x\, de^x = e^x(\sin x + \cos x) = e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

§ 72. Integration trigonometrischer Funktionen.

Durch Umkehrung der Differentiationsformeln der vorigen Paragraphen erhalten wir die Integrationsformeln:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Mit Hilfe dieser Formeln und der allgemeinen Sätze von § 27 lassen sich zahlreiche Funktionen integrieren, in deren Ausdruck trigonometrische Funktionen auftreten. Wir müssen uns hier mit der Behandlung einiger Beispiele begnügen:

1. Setzen wir in § 27, (4):

$$z = \varphi(x) = 2x, \text{ also } \frac{dz}{dx} = 2 \quad \text{und } f(z) = \sin z,$$

so erhalten wir:

$$\int \sin 2x \cdot 2\, dx = \int \sin z\, dz = -\cos z + C$$

also:

$$\int \sin 2x\, dx = -\tfrac{1}{2} \cos 2x + C; \quad \text{ebenso: } \int \cos 2x\, dx = \tfrac{1}{2} \sin 2x + C.$$

2. Die Integrale:

$$\int \sin^2 x\,dx, \quad \int \cos^2 x\,dx$$

können auf das zuletzt berechnete zurückgeführt werden durch Berücksichtigung der elementaren Formeln:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

3. Eine rationale Funktion von $\cos x$ und $\sin x$ kann dadurch in eine rationale Funktion einer Hilfsvariabeln z übergeführt werden, daß man

$$z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

setzt; es ist nämlich dann:

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \sin x = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(1 + z^2).$$

Soll z. B.

$$J = \int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

berechnet werden, so kann dafür geschrieben werden:

$$\int \frac{(1 + z^2)\,dx}{a(1 + z^2) + b(1 - z^2)},$$

und das ist nach § 27 (4) gleich:

$$2\int \frac{dz}{a + b + (a - b)z^2}.$$

Wir wollen nun hier nur den Fall behandeln, daß $a + b$ und $a - b$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; dann können wir weiter setzen:

$$z = u\sqrt{\frac{b + a}{b - a}}, \quad dz = \sqrt{\frac{b + a}{b - a}}\,du$$

und erhalten:

$$J = \frac{2}{b + a} \cdot \sqrt{\frac{b + a}{b - a}} \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{1 + u}{1 - u} + C$$

(vgl. § 34).

4. Ein Integral wie

$$\int x \sin x\,dx$$

kann durch partielle Integration bestimmt werden; setzt man

$$x = u, \quad \sin x\,dx = dv,$$

so kommt:

$$du = dx, \qquad v = -\cos x$$

und also:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

5. Bei dem Integral

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx$$

führt die partielle Integration vermittelst

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \sin bx \, dx$$

$$du = a e^{ax} dx, \qquad v = -\frac{\cos bx}{b}$$

zunächst nicht zum Ziele, indem man nur erhält:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \Big| -ab \Big| \; b^2,$$

so daß also nur das vorgelegte Integral durch ein anderes ausgedrückt ist, das nicht leichter zugänglich ist. Wir kommen aber zum Ziele, wenn wir dasselbe Verfahren auch auf das neue Integral anwenden; setzen wir:

$$u = e^{ax}, \qquad dv = \cos bx \, dx$$

$$du = a e^{ax} dx, \qquad v = \frac{\sin bx}{b},$$

so erhalten wir:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx; \quad \Big| \; b^2 \; \Big| \; ab$$

und da diese Gleichung mit der vorigen nicht identisch ist, können wir beide nach den beiden unbekannten Integralen auflösen. Wir erhalten:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (-b \cos bx + a \sin bx).$$

§ 73. Die zyklometrischen Funktionen.

Wenn zwischen zwei veränderlichen Größen x und y die Gleichung gegeben ist

$$x = \sin y, \tag{1}$$

so ist y der Bogen, dessen sinus gleich x ist. Man bezeichnete das früher durch

$$y = \text{arc}\,(\sin = x), \tag{2}$$

hat sich dann aber die kürzere Schreibweise

$$y = \text{arc}\sin x \tag{3}$$

angewöhnt, unter der also nicht etwa „Arcus des Sinus *von* x" zu verstehen ist. Vielmehr hat die Gleichung (3) ganz dieselbe Bedeutung wie (1); wir betrachten nur in (3) das y, in (1) das x als die unabhängige Variable — wozu man vergleichen möge, was in § 13 über die Willkür bei der Bezeichnung einer Variabeln als der unabhängigen gesagt ist.

Wenn wir so ein neues Funktionszeichen arc sin einführen, so haben wir uns vor allem zu fragen, ob denn dieses Zeichen eindeutig definiert ist, d. h. ob zu einem gegebenen Wert des Sinus nur ein Wert des Bogens gehört oder deren mehrere. Daß ein Funktionszeichen mehrdeutig sein kann, davon bietet schon die elementare Algebra ein Beispiel: bezeichnen wir die Auflösung der Gleichung $x = y^2$ mit

$$y = \sqrt{x},$$

so ist das damit eingeführte Funktionszeichen $\sqrt{}$ doppeldeutig, indem zu einem gegebenen positiven Werte von x *zwei* Werte von y gehören, deren jeder die Eigenschaft hat, daß sein Quadrat gleich x ist. Zwischen diesen beiden Werten — den beiden Bedeutungen der doppelwertigen Funktion $\sqrt{}$ — besteht die einfache Beziehung, daß sie einander entgegengesetzt gleich sind.

In unserem Fall haben wir nun gar mit einer unendlich vieldeutigen Funktion zu tun: zu jedem Wert von x im Intervall $(-1 \ldots\ldots +1)$ gehört nicht nur ein Wert des Bogens, dessen Sinus gerade gleich diesem x ist, sondern unendlich viele. Es ergibt sich nämlich unmittelbar aus der Definition: ist y_0 irgend ein Wert, dessen Sinus gleich x ist, so haben nicht nur alle die Werte

$$y_0 + 2k\pi, \tag{4}$$

dieselbe Eigenschaft, wenn unter k irgendeine positive oder negative ganze Zahl verstanden wird, sondern auch alle die Werte:

$$\pi - y_0 + 2k\pi, \tag{5}$$

mit derselben Bedeutung von k. Wir können also sagen:

Die mit arc sin x *bezeichnete Funktion der auf das Intervall* $(-1 \ldots +1)$ *beschränkten Variabeln* x *ist unendlich vieldeutig; die zu einem und demselben Wert des Arguments gehörenden Werte dieser Funktion zerfallen in zwei Reihen. Die Werte der einen dieser Reihen werden aus einem von ihnen durch die Formel* (4) *erhalten, in der* k *alle positiven und negativen ganzzahligen Werte durchläuft, die Werte der anderen Reihe ebenso durch die Formel* (5).

(Würde man für y einen Wert der zweiten Reihe genommen haben, so würde die Formel (4) dieselben Werte liefern, wie vorher die Formel (5); und umgekehrt).

Manchmal empfiehlt es sich, aus den unendlich vielen Werten, die eine unendlich vieldeutige Funktion für einen bestimmten Argumentwert hat, einen als den *Hauptwert* herauszugreifen. Bei der Quadratwurzel können wir das sehr einfach dadurch machen, daß wir den *positiven* Wert als den Hauptwert bezeichnen; bei unserem Arcus sinus etwa dadurch, daß wir unter allen Werten denjenigen nehmen, der den kleinsten absoluten Betrag hat. Dieser Hauptwert wächst von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, wenn x von -1 bis $+1$ wächst. Es ist aber wohl zu beachten, daß diese Bevorzugung des Hauptwertes etwas durchaus willkürliches ist. Wollen wir die Funktion $y = \operatorname{arc} \sin x$ durch eine Kurve in kartesischen Koordinaten geometrisch darstellen, so brauchen wir die Figur von § 169 nur um 90° zu drehen, und dann um die y-Achse aus der Zeichnungsebene heraus, durch 180° umzuklappen. Zeichnet man dabei das dem „Hauptwert" entsprechende Stück stärker, so sieht man, daß damit ganz willkürlich von einer geometrisch fortlaufenden Kurve ein Stück herausgeschnitten wird.

In derselben Weise können wir nun auch die Umkehrung der übrigen trigonometrischen Funktionen betrachten. Was zunächst die Funktion

$$y = \operatorname{arc} \cos x \tag{6}$$

betrifft, so gehen alle ihre Werte aus einem von ihnen, y_0, durch die beiden Formeln

$$y_0 + 2k\pi \tag{7}$$

und

$$-y_0 + 2k\pi \tag{8}$$

hervor, in denen das k wieder alle positiven und negativen ganzzahligen Werte zu durchlaufen hat. Man sieht, daß man hier einen

Hauptwert nicht durch dieselbe Festsetzung wie vorhin ausscheiden kann: unter den Werten von arc cos x sind stets zwei, die denselben absoluten Betrag haben und zugleich einen kleineren als alle übrigen. Man kann aber etwa verabreden, daß man von diesen beiden den positiven wählen wolle; der so definierte Hauptwert der Funktion arc cos x nimmt dann von π bis 0 ab, wenn x von -1 bis $+1$ wächst.

Die Funktionen arc tg x und arc cot x sind für alle Werte des Arguments definiert. Auch sie sind unendlich vieldeutig, aber die Werte, die sie für einen Argumentwert annehmen, lassen sich aus einem von ihnen durch eine einzige Formel ableiten, nämlich durch die Formel:

$$y_0 + k\pi, \tag{9}$$

in der k wieder alle positiven und negativen ganzzahligen Werte zu durchlaufen hat. Als Hauptwert von arc tg kann wieder der absolut kleinste dieser Werte bezeichnet werden; dieser nimmt dann von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ zu, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst. Wollten wir aber dieselbe Festsetzung für arc cot treffen, so würde das mit einem Mißstand verbunden sein: wir würden nämlich damit eine Funktion definieren, die von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$ abnimmt, wenn x von $-\infty$ bis 0 wächst, dann aber plötzlich von $-\frac{\pi}{2}$ auf $+\frac{\pi}{2}$ springt und nun wieder bis 0 abnimmt, während x weiter von 0 bis $+\infty$ wächst — also eine bei $x = 0$ *unstetige* Funktion. Wollen wir das vermeiden, so müssen wir als Hauptwert der Funktion arc cot etwa denjenigen definieren, der dem Intervall zwischen 0 und π angehört.

Alle diese Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen werden als *zyklometrische Funktionen* bezeichnet. Will man ihren Wert für irgend einen Argumentwert haben, so muß man zu diesem Argumentwert seinen Logarithmus in der Tafel der Logarithmen der Zahlen suchen, dann nachsehen, wo dieser Logarithmus in der Tafel der Logarithmen der betreffenden trigonometrischen Funktionen sich findet — unter Beachtung des Umstandes, daß in dieser Tafel gewöhnlich alle Logarithmen um zehn Einheiten zu groß angegeben sind —, dann aus dieser Tafel den Wert des zugehörigen Winkels in Graden, Minuten und eventuell Sekunden entnehmen und schließlich diese Grade u.s.w. mit Hilfe des zu diesem Zweck vorhandenen

Hilfstäfelchens nach Anleitung von § 69 in Bogenmaß verwandeln.

§ 74. Die Differentiation der zyklometrischen Funktionen.

Da die zyklometrischen Funktionen als Umkehrungen der trigonometrischen Funktionen eingeführt sind, deren Differentiation wir bereits erledigt haben, so können wir die Regeln für die Differentiation der zyklometrischen Funktionen auf den allgemeinen Satz von § 22 stützen. Besondere Sorgfalt erfordert dabei nur die Auswahl unter den Werten der auftretenden mehrdeutigen Funktionen.

Aus der Gleichung

$$\frac{dx}{dy} \equiv \frac{d \sin y}{dy} = \cos y$$

ergibt sich umgekehrt:

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

oder wenn wir den Kosinus durch den Sinus ausdrücken:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{1}$$

Hier ist nun zu entscheiden, ob der positive oder der negative Wert der Wurzel genommen werden muß. Wird unter arc sin der Hauptwert verstanden, also derjenige Wert, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, so ergibt sich die Entscheidung sofort: denn für alle diese Werte des Bogens ist der Kosinus positiv. Also:

In der Gleichung (1) *ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen, wenn unter dem Zeichen* arc sin *der Hauptwert dieser unendlich vieldeutigen Funktion verstanden wird.*

Daraus ergibt sich dann, daß dasselbe auch noch gilt, wenn unter arc sin einer der Werte verstanden wird, der aus dem Hauptwert durch Anwendung der Formel (4) von § 73 entsteht; dagegen ist für die durch Anwendung der Formel (5) von § 73 aus dem Hauptwert entstehenden Werte des arc sin der negative Wert der Wurzel zu nehmen. In der Tat nehmen die ersteren Werte mit wachsendem x zu, die letzteren ab.

Ebenso ergibt sich aus

$$\frac{d \cos y}{dy} = -\sin y$$

umgekehrt:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (2)$$

Hier ist aber für den Hauptwert und für die zu ihm gehörenden Werte der negative Wert der Wurzel zu nehmen*), für die andere Reihe von Werten der positive; wie sich schon daraus ergibt, daß die ersteren mit wachsendem x ab-, die letzteren zunehmen.

Bei arc tg und arc cot ist keine derartige Vorzeichendiskussion erforderlich. Wir erhalten einfach:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (3)$$

$$\frac{d \operatorname{arc} \cot x}{dx} = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+x^2}. \qquad (4)$$

§ 75. Umkehrung dieser Regeln. Integration neuer Klassen von algebraischen Funktionen.

Aus den Formeln des vorigen Paragraphen ergibt sich durch Umkehrung, gemäß der Definition des Integrierens:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C_1 = -\operatorname{arc} \cos x + C_2, \qquad (1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C_1 = -\operatorname{arc} \cot x + C_2. \qquad (2)$$

Es mag auf den ersten Blick befremdend erscheinen, daß wir hier für jedes dieser beiden Integrale zwei anscheinend verschiedene Ausdrücke erhalten. Man überzeugt sich aber, daß diese Resultate durchaus in Übereinstimmung sind mit dem allgemeinen Satz von § 26, nach dem zwei Funktionen, die denselben Differentialquotienten haben, sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden. In

*) Man schreibt daher auch gewöhnlich:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

der Tat ergibt sich aus der Definition von Kosinus und Kotangente als Sinus, bzw. Tangente des Complements:

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \cot x = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$-\operatorname{arc} \cos x = \operatorname{arc} \sin x - \frac{\pi}{2},$$

$$-\operatorname{arc} \cot x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2}.$$

Mit Hilfe dieser Formeln können wir nun auch die Integration solcher rationalen Funktionen zu stande bringen, die sich nach den früheren Formeln nicht behandeln ließen, weil der Versuch, den Nenner in lineare Faktoren zu zerlegen, auf imaginäre Größen führte. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß der Zähler der zu integrierenden Funktion vom ersten, der Nenner vom zweiten Grade ist, daß also ein Integral der Form vorliegt:

$$J = \int \frac{(gx + h)\, dx}{ax^2 + 2bx + c}.$$

Verfahren wir wie bei denjenigen Schritten, durch die man die Auflösung einer Gleichung zweiten Grades vorbereitet („Ergänzung der beiden ersten Glieder zum Quadrat“), so können wir schreiben:

$$J = \int \frac{a(gx + h)\, dx}{(ax + b)^2 + (ac - b^2)}.$$

Der Fall

$$ac - b^2 \leqq 0$$

ist durch die früheren Untersuchungen (§ 33—36) erledigt; wir haben es also nur mehr mit dem Falle

$$ac - b^2 > 0$$

zu tun. In diesem können wir eine neue unabhängige Integrationsveränderliche durch die Substitution:

$$u = \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}}, \qquad x = \frac{-b + u\sqrt{ac - b^2}}{a}$$

einführen; wir erhalten dann:

$$J = \frac{g}{a} \int \frac{u\, du}{1 + u^2} + \frac{ah - bg}{a\sqrt{ac - b^2}} \int \frac{du}{1 + u^2}.$$

Von den beiden hier noch stehenden Integralen ist das zweite nach Formel (2) gleich arc tg u; das andere läßt sich ebenfalls leicht erledigen, indem wir abermals

$$1 + u^2 = v$$

substituieren, wodurch es in

$$\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} \log v$$

übergeht.

In ähnlicher Weise kann man Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$$

auf eine der drei Formen

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

bringen: von diesen ist die erste nach (1) gleich arc sin $u + C$; für die zweite und dritte haben wir bereits in § 3 die Werte

$$\log\left(u + \sqrt{u^2 \pm 1}\right) + C$$

gefunden.

§ 76. Weitere Sätze über trigonometrische Funktionen.

1. Es sei mit C_n die Summe bezeichnet:

$$C_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx. \tag{1}$$

Multiplizieren wir hier mit $2 \sin \frac{x}{2}$ und ersetzen die Produkte je zweier Sinus durch Differenzen, so erhalten wir:

$$2 C_n \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right) + \left(\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2}\right) + + \ldots$$
$$+ \left(\sin \frac{2n+1}{2} x - \sin \frac{2n-1}{2} x\right).$$

Hier heben sich alle Glieder weg bis auf das vorletzte; wir finden so:

$$C_n = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}. \tag{2}$$

2. Wird ferner

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \tag{3}$$

gesetzt, so erhalten wir in ganz analoger Weise:

$$2 S_n \sin\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \ldots$$
$$+ \left(\cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x$$
$$= 2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}$$

und somit:

$$S_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{4}$$

3. Setzen wir in der ersten Formel für x den speziellen Wert

$$x = \frac{2m\pi}{n},$$

wo jetzt auch m eine ganze Zahl bedeuten soll, so liefert sie:

$$C_n = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{(2n+1)m\pi}{n}}{\sin\frac{m\pi}{n}}. \tag{5}$$

Ist m *nicht durch* n *teilbar*, so ist der Wert dieses Ausdrucks gleich $\frac{1}{2}$, also ergibt sich:

$$\cos\frac{2m\pi}{n} + \cos\frac{4m\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-2)m\pi}{n} + \cos 2m\pi = 0. \tag{6}$$

Ist aber m *durch* n *teilbar*, so erscheint der Ausdruck (5) in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Eine direkte Betrachtung der Summe (1), in der dann jeder Summand bis auf den ersten gleich 1 ist, oder auch die Ausführung des Grenzüberganges nach den Vorschriften von § 55 ergibt in diesem Falle:

$$\cos\frac{2m\pi}{n} + \cos\frac{4m\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-2)m\pi}{n} + \cos 2m\pi = n. \tag{7}$$

4. Die zweite Formel liefert bei derselben Substitution:

$$\sin\frac{2m\pi}{n} + \sin\frac{4m\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(2n-2)m\pi}{n} + \sin 2m\pi = 0; \tag{8}$$

und diese Gleichung gilt auch für ganzzahlige durch n teilbare m, indem dann jedes einzelne Glied der Summe gleich 0 ist.

§ 77. Trigonometrische Interpolation.

Es sei nun eine endliche Summe der Form gegeben:

$$\begin{aligned} y = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots + A_m \cos mx \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \ldots + B_m \sin mx \end{aligned} \tag{1}$$

$$\left(m \leqq \frac{n}{2}\right).$$

Bezeichnen wir mit y_k den Wert, den diese Summe annimmt, wenn man in ihr x durch $\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ ersetzt, so erhalten wir durch Addition aller so entstehenden Gleichungen:

$$y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} = \frac{n}{2}A_0 + A_1 \sum_k \cos \frac{2k\pi}{n} + A_2 \sum_k \cos \frac{4k\pi}{n} + \ldots$$

$$+ B_1 \sum_k \sin \frac{2k\pi}{n} + B_2 \sum_k \sin \frac{4k\pi}{n} + \ldots$$

Auf der rechten Seite sind hier wegen der Gleichungen (6) und (8) von § 76 alle Glieder gleich Null, mit Ausnahme des ersten; wir erhalten also:

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \frac{y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}}{n}, \tag{2}$$

d. h. in einer Formel der Gestalt (1) stellt das von den trigonometrischen Funktionen freie Glied das arithmetische Mittel aus denjenigen Werten dar, die die Funktion in n gleichmäßig über die Periode verteilten Punkten annimmt. (Nebenbei bemerkt: es geht daraus hervor, daß sich eine periodische Funktion nur dann durch eine Formel der angegebenen Art darstellen läßt, wenn dieses Mittel von der Auswahl des Anfangspunktes unabhängig ist).

Aus dieser Bestimmung des Koeffizienten A_0 können wir nun durch einen einfachen Kunstgriff auch die Bestimmung der übrigen Koeffizienten ableiten. Multiplizieren wir nämlich mit $\cos rx$ $(r \leqq m)$ und ersetzen rechts die Produkte trigonometrischer Funktionen wieder durch Summen und Differenzen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} y \cos rx = \tfrac{1}{2}A_0 \cos rx + \tfrac{1}{2}A_1 \{\cos (r+1)x + \cos (r-1)x\} + \ldots \\ + \tfrac{1}{2}A_r \{\cos 2rx + 1\} + \ldots \\ + \tfrac{1}{2}B_1 \{\sin (r+1)x + \sin (r-1)x\} + \ldots \\ + \tfrac{1}{2}B_r \sin 2rx + \ldots \end{aligned}$$

Wir schließen daraus: läßt sich y durch die Formel (1) darstellen, so läßt sich auch $y \cos rx$ durch eine Formel ähnlicher Bauart darstellen, in der aber das von den trigonometrischen Funktionen freie Glied den Wert $\frac{1}{2} A_r$ hat. Wenden wir auf diese Formel den vorigen Satz an, so finden wir:

$$\frac{1}{2} A_r = \frac{1}{n} \left\{ y_0 + y_1 \cos \frac{2r\pi}{n} + y_2 \cos \frac{4r\pi}{n} + \ldots \right\} \tag{3}$$

und ebenso wird gefunden:

$$\frac{1}{2} B_1 = \frac{1}{n} \left\{ y_1 \sin \frac{2r\pi}{n} + y_2 \sin \frac{4r\pi}{n} + \ldots \right\}. \tag{4}$$

Wir sind also zu folgendem Resultate gekommen: wenn eine periodische Funktion sich durch eine Formel (1) darstellen lassen soll, so müssen die Koeffizienten dieser Formel mit den Werten, die die Funktion für

$$x = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-2)\pi}{n}$$

annimmt, durch die Relationen (2), (3), (4) verbunden sein.

Soll nun eine Funktion der Form (1) bestimmt werden, die für diese Werte von x die vorgeschriebenen Werte y_k annimmt, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$y_k = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{2k\pi}{n} + A_2 \cos \frac{4k\pi}{n} + \ldots + B_1 \sin \frac{2k\pi}{\pi} + B_2 \sin \frac{4k\pi}{n} + \ldots$$

Diese Gleichungen sind vom ersten Grad in Bezug auf die unbekannten Koeffizienten und an Zahl der Anzahl dieser Unbekannten gleich. Denn ist n eine ungerade Zahl, $= 2r + 1$, so hat man, außer A_0, r Koeffizienten A und r Koeffizienten B, im ganzen also $2r + 1$; ist aber n eine gerade Zahl, $= 2r$, so kommt B_r in den Gleichungen überhaupt nicht vor, indem $\sin \frac{2rk\pi}{2r}$ für jedes ganzzahlige k gleich 0 ist; man hat also auch in diesem Falle ebensoviele Unbekannte als Gleichungen. Sie werden folglich entweder für jedes Wertsystem der y_k eine Lösung zulassen oder für gewisse Wertsysteme der y_k keine Lösung, für andere aber unendlich viele. Aus dem vorhergehenden ergibt sich, daß sie für kein Wertsystem der y unendlich viele Lösungen zulassen. Also müssen sie für jedes Wertsystem der y eine Lösung zulassen; nämlich eben die durch (2), (3), (4) gegebene.

Das Resultat dieser Untersuchung ist demnach: wir können die Koeffizienten der Formel (1)' durch die Gleichungen (2), (3), (4) immer so bestimmen, daß diese Funktion für die Argumentwerte $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{(2n-2)\pi}{n}$ die willkürlich gegebenen Funktionswerte $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ annimmt; wir können also jede periodische Funktion interpolatorisch (§ 58) durch die Formel (1) darstellen.

Will man solche Rechnungen wirklich ausführen, so wird man für n, wenn möglich, eine gerade, am besten eine durch 4 teilbare Zahl wählen. Wir wollen nur den Fall $n = 8$ ins Auge fassen; dann hat man, da B_4 herausfällt, die acht Koeffizienten der Formel:

$$y = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + A_4 \cos 4x$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x$$

aus den acht zu

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$$

gehörenden Funktionswerten zu berechnen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
y_1 + y_7 &= A_0 + 2A_1 \cos\frac{\pi}{4} + 2A_3 \cos\frac{3\pi}{4} - 2A_4 \\
y_2 + y_6 &= A_0 - 2A_2 + 2A_4 \\
y_3 + y_5 &= A_0 + 2A_1 \cos\frac{3\pi}{4} + 2A_3 \cos\frac{\pi}{4} - 2A_4 \\
y_1 - y_7 &= 2B_1 \sin\frac{\pi}{4} + 2B_2 + 2B_3 \sin\frac{3\pi}{4} \\
y_2 - y_6 &= 2B_1 \qquad\qquad - 2B_3 \\
y_3 - y_5 &= 2B_1 \sin\frac{3\pi}{4} - 2B_2 + 2B_3 \sin\frac{\pi}{4} \\
y_4 &= \tfrac{1}{2}A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + A_4.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch, daß $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$, so erhält man weiter:

$$\begin{aligned}
y_0 + y_4 &= A_0 + 2A_2 + 2A_4 \\
y_0 - y_4 &= 2A_1 + 2A_3 \\
(y_1 + y_7) + (y_3 + y_5) &= 2A_0 - 4A_4 \\
(y_1 + y_7) - (y_3 + y_5) &= (4A_1 - 4A_3)\cos\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$(y_1 - y_7) + (y_3 - y_5) = (4B_1 + 4B_3)\sin\frac{\pi}{4}$$
$$(y_1 - y_7) - (y_3 - y_5) = 4B_2$$
$$(y_0 + y_4) + (y_2 + y_6) = 2A_0 + 4A_4$$
$$(y_0 - y_4) - (y_2 + y_6) = 4A_2.$$

Seien etwa gegeben:

$$y_0 = 0,\ y_1 = 2,\ y_2 = 3,\ y_3 = 4,\ y_4 = 3,\ y_5 = 2,\ y_6 = 0,\ y_7 = -4$$

(also ein breiter Wellenberg und ein enges tiefes Tal), so schreibe man diese Zahlen wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} y_0 = 0 & y_1 = 2 & y_2 = 3 & y_3 = 4 & y_4 = 3 \\ & y_7 = -4 & y_6 = 0 & y_5 = 2 & \end{array}$$

und bilde von je zwei untereinanderstehenden die Summe:

$$s_0 = 0 \quad s_1 = -2 \quad s_2 = 3 \quad s_3 = 6 \quad s_4 = 3$$

und die Differenz:

$$d_1 = 6 \qquad d_2 = 3 \quad d_3 = 2.$$

Zur Berechnung der Kosinusglieder schreibe man die Summen analog:

$$\begin{array}{ccc} s_0 = 0 & s_1 = -2 & s_2 = 3 \\ s_4 = 3 & s_3 = 6 & \end{array}$$

und bilde wieder von je zwei untereinanderstehenden die Summe:

$$S_0 = 3 \quad S_1 = +4 \quad S_2 = 3$$

und die Differenz:

$$D_0 = -3 \quad D_1 = -8.$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} 4A_0 = S_0 + S_1 + S_2 = 10 & \frac{1}{2}A_0 = \frac{5}{4} \\ 8A_4 = S_0 - S_1 + S_2 = 2 & A_4 = \frac{1}{4} \\ 4A_2 = S_0 - S_2 = 0 & A_2 = 0 \\ 2A_1 + 2A_3 = D_0 = -3 & A_1 + A_3 = -1{,}5 \\ (4A_1 - 4A_3)\cos\frac{\pi}{4} = D_1 = -8 & A_1 - A_3 = -2{,}82 \\ \hline & A_1 = -2{,}16 \\ & A_3 = +0{,}66. \end{array}$$

Ebenso werden die Sinusglieder erhalten:

$$d_1 = 6 \quad d_2 = 3$$
$$d_3 = 2$$
$$\text{Summe} = 8$$
$$\text{Differenz} = 4$$

$$2B_1 - 2B_3 = d_2 = 3 \qquad B_1 - B_3 = 1{,}5$$
$$(4B_1 + 4B_3)\sin\frac{\pi}{4} = d_1 + d_3 = 8 \qquad B_1 + B_3 = 2{,}82$$
$$4B_2 = d_1 - d_3 = 4 \qquad B_1 = 2{,}16$$
$$B_3 = 0{,}66$$
$$B_2 = 1.$$

Die gesuchte Formel ist also:

$$y = 1{,}25 - 2{,}16\cos x \qquad + 0{,}66\cos 3x + 0{,}25\cos 4x$$
$$+ 2{,}16\sin x + \sin 2x + 0{,}66\sin 3x$$
$$= 1{,}25 + 3{,}05\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x + 0{,}93\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}25\cos 4x.$$

§ 78. Ungedämpfte Schwingungen.

Sehr häufig hat man mit Bewegungen zu tun, die nach dem einfachen Gesetze:

$$x = R\sin\omega t \tag{1}$$

vor sich gehen; dabei bedeutet t die Zeit, x irgend eine mit der Zeit veränderliche Größe, z. B. den Abstand eines beweglichen Punktes von seiner Gleichgewichtslage, R und ω Konstante. Man nennt eine solche Bewegung eine einfache Sinusbewegung oder auch eine Pendelschwingung, weil die Bewegung eines Pendels wenigstens annähernd nach diesem Gesetze vor sich geht. Die Konstante R heißt die *Amplitude* der Schwingung; sie gibt den größten Wert an, den x erreicht, da 1 der größte Wert ist, den der Sinus erreicht. Wächst t um $2\pi/\omega$, so nimmt x denselben Wert wieder an, den es zuerst hatte; $2\pi/\omega$ ist also die Dauer einer *Schwingungsperiode* (ganzen Schwingung), der reziproke Wert $\omega/2\pi$ ist die Anzahl der in der Zeiteinheit (der Sekunde) erfolgten Perioden oder die *Frequenzzahl.*

Die Formel (1) setzt voraus, daß der Anfangspunkt der Zeitzählung in einen derjenigen Momente verlegt ist, in welchen $x = 0$ ist; und zwar, wenn R positiv ist, in einen derjenigen, in welchen

x dabei von negativen Werten zu positiven übergeht. Wenn wir nur eine solche Bewegung zu untersuchen haben, können wir es ja immer so einrichten; müssen wir aber mehrere solcher Bewegungen nebeneinander betrachten, die nicht gleichzeitig durch die Null-Lage hindurchgehen, so können wir nicht erreichen, daß alle diese Bewegungen gleichzeitig in der einfachen Form (1) erscheinen. Wir müssen vielmehr dann t durch $t - t_0$ ersetzen, unter t_0 einen der Augenblicke verstanden, in denen x von negativen Werten durch Null hindurch zu positiven übergeht. Die Gleichung lautet dann:

$$x = R \sin [\omega (t - t_0)]; \tag{2}$$

die äußere Klammer wird in solchen Fällen auch wohl weggelassen. Statt dessen kann man, indem man

$$-\omega t_0 = \varphi \tag{3}$$

setzt, auch schreiben:

$$x = R \sin (\omega t + \varphi); \tag{4}$$

der Ausdruck

$$\omega t + \varphi, \tag{5}$$

der eine lineare Funktion der Zeit t ist, heißt die *Phase* der Bewegung zur Zeit t, das φ heißt *Phasenkonstante*. Die Differenz der Phasen zweier gleichzeitig vor sich gehender einfacher Sinusbewegungen ist von der Zeit unabhängig, nämlich gleich der Differenz ihrer Phasenkonstanten.

Löst man in (4) die Klammer auf und setzt dann:

$$R \sin \varphi = A, \qquad R \cos \varphi = B, \tag{6}$$

so geht die Gleichung über in:

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \tag{7}$$

Ist umgekehrt eine Gleichung dieser Form gegeben, so kann man sie in die Form (4) überführen, indem man R und φ aus (6) bestimmt; man findet:

$$R = + \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B}, \tag{8}$$

muß aber dabei beachten, daß ein Winkel durch seine Tangente nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von π (nicht von 2π) bestimmt ist und also zu vollständiger Bestimmung des Quadranten, in dem der Winkel φ liegt, noch eine der beiden Gleichungen

$$\sin \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad \cos \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{9}$$

hinzunehmen, in denen die Quadratwurzel positiv verstanden ist. Man sieht aber, daß die Bestimmung von R und φ immer möglich ist; *auch die Gleichungsform* (7) *stellt also in jedem Fall eine einfache Sinusschwingung vor.*

Fragen wir nun nach Kräften, die imstande sind eine solche Bewegung hervorzubringen, so müssen wir differentiieren; wir finden:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \tag{10}$$

und durch eine zweite Differentiation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t. \tag{11}$$

Es ist also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{12}$$

d. h. die Beschleunigung ist dem Ausschlag x proportional. Nun ist die Kraft, die auf einen Punkt wirken muß, damit er eine vorgeschriebene Bewegung annimmt, gleich dem Produkt aus seiner Masse m und seiner Beschleunigung, die Kraft, die auf einen Punkt ausgeübt werden muß, wenn er eine einfache Sinusschwingung ausführen soll, ist also seinem Ausschlag in jedem Augenblick proportional:

$$f = -m\omega^2 x. \tag{13}$$

Den Faktor, mit dem wir den Ausschlag multiplizieren müssen, um die Kraft zu erhalten, nennen wir den *Elastizitätskoeffizienten;* wie die Gleichung (13) zeigt, ist er gleich dem Produkt der Masse mit dem Quadrat der Frequenzzahl.

Wir dürfen also sagen: *Überall da, wo wir einfache harmonische Schwingungen eines Punktes beobachten, können wir auf das Vorhandensein einer elastischen Kraft schließen und die Intensität dieser Kraft aus Beobachtungen der Frequenzzahl entnehmen.*

Die Bewegung eines Punktes ist durch die wirkenden Kräfte nicht vollständig bestimmt; um sie angeben zu können, müssen wir noch seine Anfangslage und seine Anfangsgeschwindigkeit kennen. Aus diesen bestimmen sich die Werte, die in den allgemeinen Formeln den Konstanten A und B, bzw. R und φ beizulegen sind. Wir wollen nur zwei Fälle diskutieren:

1) Befindet sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ außerhalb seiner Ruhelage in einem Punkte x_0, hat er aber keine Anfangsgeschwindig-

keit, so ergeben die Gleichungen (7) und (10), die auch für $t = 0$ erfüllt sein müssen, daß

$$A = x_0, \qquad B = 0 \tag{14}$$

sein muß. Setzt man diese Werte in (7) und (10) ein, so erhält man:

$$x = x_0 \cos \omega t, \qquad v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t. \tag{15}$$

2) Befindet sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ in der Gleichgewichtslage, hat er aber eine Anfangsgeschwindigkeit v_0, so ergibt sich:

$$A = 0, \qquad B\omega = v_0, \tag{16}$$

und wenn man diese Werte in die Gleichungen (7) und (10) einsetzt, so nehmen sie die Form an:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \qquad v = v_0 \cos \omega t. \tag{17}$$

§ 79. Gedämpfte Schwingungen.

Bei den im vorigen Paragraphen betrachteten Schwingungen hatten wir angenommen, daß die Amplitude als konstant behandelt werden dürfe. Tatsächlich ist sie in den meisten Fällen nicht konstant, sondern sie nimmt mit wachsender Zeit ab, und zwar so, daß der Quotient je zweier aufeinanderfolgender Maximalausschläge konstant ist. Wollen wir das durch eine Formel darstellen, so mögen wir etwa zunächst ansetzen:

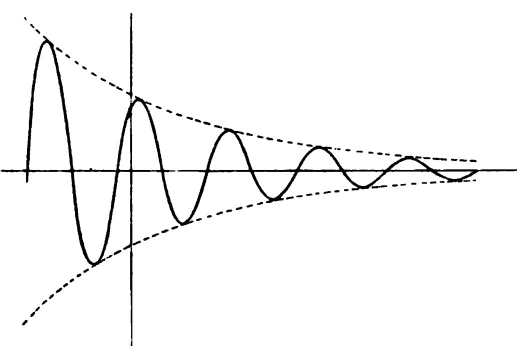


Fig. 38.

$$x = f(t)\,(A \cos \omega t + B \sin \omega t). \tag{1}$$

Die Funktion $f(t)$ ist dann noch so zu bestimmen, daß sie für

$$t = 0,\ \frac{2\pi}{\omega},\ \frac{4\pi}{\omega},\ \frac{6\pi}{\omega}, \cdots \tag{2}$$

bzw. die Werte

$$a,\ ab,\ ab^2,\ ab^3, \cdots \tag{3}$$

annimmt. Den Faktor a können wir dabei weglassen, indem wir A und B für aA und aB schreiben können; führen wir dann noch das *„logarithmische Dekrement"*, d. h. den Logarithmus des Quotienten zweier aufeinander folgender Maximalausschläge nach derselben Seite, durch:

$$\alpha = -\log b \tag{4}$$

ein, so treten an Stelle der Werte (3) die folgenden:

$$1, \quad e^{-\alpha}, \quad e^{-2\alpha}, \quad e^{-3\alpha}, \cdots. \tag{5}$$

Das Problem, eine Funktion $f(t)$ von t so zu bestimmen, daß sie für die Werte (2) von t bzw. die Werte (5) annimmt, ist ein Interpolationsproblem (§ 58); seine einfachste Lösung ist

$$f(t) = e^{-\frac{\alpha\omega}{2\pi}t}. \tag{6}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\frac{\alpha\omega}{2\pi} = \lambda, \tag{7}$$

so nimmt die Bewegungsgleichung die Form an:

$$x = e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t). \tag{8}$$

Eine Bewegung, die nach diesem Gesetze vor sich geht, nennen wir eine gedämpfte Sinusschwingung.

Um zu untersuchen, welcherlei Kräfte eine solche Bewegung bewirken, differentiieren wir wieder (nach der Regel für die Differentiation eines Produkts, § 18). Wir erhalten zunächst:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda t}(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t) - \lambda e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

und wenn wir die Glieder mit Kosinus und die mit Sinus zusammennehmen:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\lambda t}\{(-A\lambda + B\omega)\cos\omega t + (-A\omega - B\lambda)\sin\omega t\}. \tag{9}$$

Eine zweite Differentiation ergibt ebenso:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-\lambda t}\{-(-A\lambda + B\omega)\,\omega\sin\omega t + (-A\omega - B\lambda)\,\omega\cos\omega t\}$$
$$-\lambda e^{-\lambda t}\{(-A\lambda + B\omega)\cos\omega t + (-A\omega - B\lambda)\sin\omega t\}$$

oder:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-\lambda t}\{[A(\lambda^2-\omega^2) - 2B\lambda\omega]\cos\omega t + [2A\lambda\omega + B(\lambda^2-\omega^2)]\sin\omega t\}. \tag{10}$$

Man sieht, daß hier zwischen der Beschleunigung und dem augenblicklichen Ausschlag keine einfache Beziehung besteht; wohl aber besteht eine solche Beziehung zwischen diesen beiden Größen und der Geschwindigkeit. Wir können nämlich drei Konstante m, L, R so bestimmen, daß identisch, d. h. für alle Werte der Zeit, die Relation besteht

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -L \frac{dx}{dt} - Rx; \tag{11}$$

dazu muß nämlich nur:

$$\begin{aligned} m\left[A(\lambda^2-\omega^2)-2B\lambda\omega\right] &= L(A\lambda-B\omega)-RA, \\ m\left[2A\lambda\omega+B(\lambda^2-\omega^2)\right] &= L(A\omega+B\lambda)-RB \end{aligned} \tag{12}$$

sein. Das Merkwürdige ist nun, daß diesen Gleichungen durch Werte der Verhältnisse von m, L, R genügt werden kann, die von A und B, d. h. vom Anfangszustand unabhängig sind, nämlich:

$$L = 2m\lambda, \qquad R = m(\lambda^2+\omega^2). \tag{13}$$

Dieses Resultat läßt sich so deuten: *Eine gedämpfte Sinusschwingung kommt dann zustande, wenn auf einen Punkt außer einer dem Abstand von der Gleichgewichtslage proportionalen elastischen Kraft noch eine „Dämpfung", d. h. eine der Geschwindigkeit proportionale und ihr entgegengesetzt gerichtete Kraft einwirkt.*

Die Größe der elastischen Kraft und der Dämpfung lassen sich vermöge der Gleichungen (13) aus der Schwingungsdauer $2\pi/\omega$ und dem logarithmischen Dekrement, das nach (7) gleich $2\pi\lambda/\omega$ ist, berechnen.

Fragen wir umgekehrt, ob durch das Zusammenwirken einer elastischen Kraft und einer Dämpfung auch stets eine Bewegung der hier betrachteten Art zustande kommt, so ist diese Frage zu verneinen. Denn wenn wir aus gegebenen Werten von R und L vermöge der Gleichungen (13) Schwingungsdauer und Dekrement zu berechnen versuchen, so erhalten wir nicht unter allen Umständen einen reellen Wert für ω, sondern nur, wenn

$$4Rm - L^2 > 0 \tag{14}$$

ist. Eine gedämpfte Sinusschwingung kommt also nur dann zustande, wenn die Dämpfung gegenüber der elastischen Kraft nicht zu stark ist; andernfalls wird der Gleichung (11) durch

$$x = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t} \tag{15}$$

genügt, mit

$$\lambda_1 = \frac{1}{2m}(L + \sqrt{L^2 - 4Rm}), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2m}(L - \sqrt{L^2 - 4Rm}) \qquad (16)$$

und beliebigen Werten von A und B. Unter so starker Dämpfung nähert sich also der bewegliche Punkt unbegrenzt seiner Ruhelage, nachdem er vorher höchstens einmal durch sie hindurch gegangen ist.

§ 80. Erzwungene Schwingungen.

Wir wollen endlich noch den Fall besprechen, daß auf unseren Punkt außer der elastischen Kraft und der Dämpfung noch eine „äußere" Kraft wirkt, die von seiner Lage unabhängig, aber in gegebener Weise von der Zeit abhängig ist. Die allgemeine Behandlung dieser Aufgabe übersteigt die uns zur Verfügung stehenden Hilfsmittel; aber ein spezieller Fall läßt sich leicht erledigen: derjenige nämlich, daß die äußere Kraft selbst eine einfache Sinusfunktion der Zeit ist. Die Bewegung erfolgt dann nach dem Gesetze:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -L\frac{dx}{dt} - Rx + E\sin\omega t, \qquad (1)$$

und dieser Gleichung kann genügt werden, indem man für x eine Funktion setzt, die dieselbe Periode wie die äußere Kraft hat. Nur würde der Versuch mißlingen, wenn man annehmen wollte, der Punkt ginge durch seine Ruhelage in demselben Moment, in welchem die äußere Kraft Null ist; vielmehr wird zwischen der äußeren Kraft und der Bewegung des Punktes eine Phasendifferenz auftreten müssen. Wir setzen also an:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \qquad (2)$$

Soll dieser Ausdruck der Gleichung genügen, so muß sein:

$$\begin{aligned} -Am\omega^2\cos\omega t - Bm\omega^2\sin\omega t &= AL\omega\sin\omega t - BL\omega\cos\omega t \\ &\quad - AR\cos\omega t - BR\sin\omega t + E\sin\omega t; \end{aligned} \qquad (3)$$

und diese Gleichung wird in der Tat für alle Werte der Zeit erfüllt, wenn die Koeffizienten von $\sin\omega t$ und $\cos\omega t$ einzeln beiderseits einander gleich sind, wenn also die unbekannten Koeffizienten A, B den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} -Am\omega^2 &= -BL\omega - AR \\ -Bm\omega^2 &= AL\omega - BR + E \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} R - m\omega^2 & L\omega \\ -L\omega & R - m\omega^2. \end{vmatrix}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Multiplikation mit den beigesetzten Faktoren:

$$\begin{aligned} A\{(R-m\omega^2)^2+L^2\omega^2\} &= -EL\omega \\ B\{(R-m\omega^2)^2+L^2\omega^2\} &= E(R-m\omega^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Führt man die hieraus sich ergebenden Werte von A und B in die angesetzte Gleichung (2) ein, so erhält man:

$$x = E\frac{-L\omega\cos\omega t+(R-m\omega^2)\sin\omega t}{(R-m\omega^2)^2+L^2\omega^2}. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck läßt sich auf die Form bringen:

$$x = \frac{E}{R_1}\sin(\omega t-\varphi); \tag{6}$$

man braucht dazu nur zu setzen:

$$\frac{\cos\varphi}{R_1} = \frac{R-m\omega^2}{(R-m\omega^2)^2+L^2\omega^2}, \qquad \frac{\sin\varphi}{R_1} = \frac{L\omega}{(R-m\omega^2)^2+L^2\omega^2}. \tag{7}$$

Dividiert man entsprechende Seiten dieser Gleichungen durcheinander, so erhält man:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{L\omega}{R-m\omega^2}. \tag{8}$$

Quadriert man aber und addiert, so ergibt sich:

$$R_1 = \sqrt{(R-m\omega^2)^2+L^2\omega^2}. \tag{9}$$

Die erste dieser Gleichungen ergibt die zwischen der äußeren Kraft und der entstehenden periodischen Schwingung bestehende Phasenverschiebung; die zweite gibt das Verhältnis zwischen der maximalen äußeren Kraft und dem Maximalausschlag. Man erkennt: *Ein unter dem Einfluß einer dem Ausschlag proportionalen elastischen Kraft, einer der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung und einer wie eine einfache Sinusfunktion der Zeit variierenden äußeren Kraft stehender Punkt kann einfache Sinusschwingungen ausführen, deren Periode mit derjenigen der äußeren Kraft übereinstimmt, deren Phase gegenüber der äußeren Kraft um den durch* (8) *gegebenen Betrag zurückbleibt und deren Amplitude sich aus der Amplitude der äußeren Kraft durch Division mit dem Faktor* (9) *bestimmt.*

Die so gefundene Lösung des Problems ist nicht die allgemeinste: der Punkt wird nicht in allen Fällen in der angegebenen Weise sich bewegen, sondern nur dann, wenn schon zwischen seiner Anfangslage und seiner Anfangsgeschwindigkeit eine geeignete Be-

ziehung besteht. Ohne Beweis sei aber angeführt, daß auch unter anderen Voraussetzungen die wirklich stattfindende Bewegung sich der hier beschriebenen mit wachsender Zeit immer mehr annähert, und zwar um so rascher, je stärker verhältnismäßig die Dämpfung ist.

Drei spezielle Fälle verdienen besondere Berücksichtigung:

1) Ist $L = 0$, d. h. ist die Dämpfung zu vernachlässigen, so wird die Phasendifferenz $= 0$, und der Divisor der Amplitude reduziert sich auf:

$$R_1 = R - m\omega^2$$

d. h. die Amplitude der erzwungenen Schwingungen wird um so größer, je näher die Periode der äußeren Kraft der Periode der „freien" nach § 78 zu bestimmenden Schwingungen kommt. Wird die Periode der erzwungenen Schwingungen genau gleich der Periode der freien, so wird $R_1 = 0$, φ unbestimmt; die Lösung, die wir gefunden haben, versagt für diesen Fall. Eine genauere Diskussion dieses Falles zeigt, daß in ihm der Punkt Schwingungen ausführt, deren Amplitude mit wachsender Zeit über alle Grenzen wächst.

2) Tritt solche Gleichheit zwischen der Periode der freien und der der erzwungenen Schwingungen ein, ohne daß die Dämpfung Null ist, so wird $\varphi = \pi/2$, $R_1 = L\omega$; es tritt also dann das Maximum der Wirkung gerade in denjenigen Augenblicken ein, in welchen die äußere Kraft 0 ist.

3) Kann die Masse m vernachlässigt werden, so ergibt sich:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{L\omega}{R}, \tag{10}$$

$$R_1 = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2};$$

die Tangente der Phasenverschiebung ist also dann der Frequenzzahl der äußeren Kraft proportional.

Die Entwicklungen der letzten drei Paragraphen finden Anwendung nicht nur auf die Bewegung eines Punktes, der einer elastischen Kraft unterworfen ist, sondern auf viele Erscheinungen, die sich als Schwingungen um Gleichgewichtszustände auffassen lassen. Insbesondere enthalten die Formeln (10) die Grundlage für die Theorie der elektrischen Wechselströme.

Übrigens ist zum Schluß noch auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der in diesen Untersuchungen absichtlich unberücksich-

tigt gelassen ist. Die Kraft, die auf den betrachteten Punkt ausgeübt wird, muß von anderen Körpern ausgehen; diese Körper werden aber von unserem Punkte eine Rückwirkung erfahren, und infolgedessen werden die von ihnen ausgeübten Kräfte von der Bewegung unseres Punktes nicht so unabhängig sein können, wie wir angenommen haben. Eine genauere Untersuchung müßte diese Rückwirkung in Betracht ziehen; doch ist sie in vielen praktisch vorkommenden Fällen so klein, daß sie vernachlässigt werden kann.

Nachtrag.

Interpolation durch Exponentialfunktionen.

Sollen beobachtete Werte einer Variabeln x, Funktion von t, durch eine Formel der Gestalt

$$x = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t} \tag{1}$$

dargestellt werden, in der nicht nur A, B, sondern auch λ, μ unbekannte, aus den Beobachtungen zu bestimmende Konstante bedeuten, so sind dazu mindestens vier Beobachtungen erforderlich. Wir wollen nur den Fall besprechen, daß die Beobachtungen äquidistant, d. h. daß die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender beobachteter Werte von t alle einander gleich sind; verlegt man den Anfangspunkt der Zählung der t in die erste Beobachtung, und bezeichnet das Intervall zwischen je zwei Beobachtungen mit δ, so gehören zu den Werten:

$$0 \qquad \delta \qquad 2\delta \qquad 3\delta \quad \text{von } t$$

die Werte:

$$x_0 \qquad x_1 \qquad x_2 \qquad x_3 \quad \text{von } x.$$

Man hat also dann die vier Gleichungen

$$x_k = Ae^{-\lambda k\delta} + Be^{-\mu k\delta} \tag{2}$$

nach den 4 Unbekannten aufzulösen. Setzt man zur Abkürzung:

$$e^{-\lambda\delta} = u, \qquad e^{-\mu\delta} = v, \tag{3}$$

so lauten diese Gleichungen, ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \quad + B, \\ x_1 &= Au + Bv, \\ x_2 &= Au^2 + Bv^2, \\ x_3 &= Au^3 + Bv^3. \end{aligned} \tag{4}$$

Um sie aufzulösen, bilde man zunächst die folgenden Kombinationen der Beobachtungen:

$$a = x_0 x_2 - x_1^2, \qquad b = x_0 x_3 - x_1 x_2, \qquad c = x_1 x_3 - x_2^2. \tag{5}$$

Ersetzt man in ihnen die x durch ihre Werte (4) und ordnet nach Potenzen von A und B, so überzeugt man sich, daß die Glieder mit A^2 und die mit B^2 sich jedesmal wegheben, und daß die übrigbleibenden Glieder sich folgendermaßen zusammenziehen lassen:

$$\begin{aligned} a &= AB\,(u^2 + v^2 - 2uv) = AB\,(u - v)^2 \\ b &= AB\,(u^3 + v^3 - u^2 v - uv^2) = AB\,(u - v)^2\,(u + v) \\ c &= AB\,(u^3 v + uv^3 - 2u^2 v^2) = AB\,(u - v)^2\,uv\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Daraus ergibt sich durch Division:

$$u + v = \frac{b}{a}, \qquad uv = \frac{c}{a}, \tag{7}$$

und also:

$$u = \frac{1}{2a}\left(b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \qquad v = \frac{1}{2a}\left(b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right). \tag{8}$$

Hat man so u und v und damit auch λ und μ gefunden, so kann die Bestimmung von A und B nach den Methoden des VII. Abschnitts geschehen.

Ergibt sich $a = b = c = 0$, so ist zu schließen, daß sich die Beobachtungen durch die eingliedrige Formel:

$$x = Ae^{-\lambda t} \tag{9}$$

darstellen lassen. Ergibt sich aber $b^2 - 4ac = 0$, ohne daß a, b, c einzeln gleich Null sind, so lassen sich die Beobachtungen zwar nicht durch eine Formel der Gestalt (1), aber durch eine Formel:

$$x = (A + Bt)\,e^{-\lambda t} \tag{10}$$

darstellen.

Ganz ähnlich kann man übrigens auch verfahren, wenn vier Beobachtungen durch eine Formel der Gestalt

$$x = e^{-\lambda t}\,(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \tag{11}$$

(vgl. § 79) dargestellt werden sollen. An Stelle der Gleichungen (4) treten dann:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \\ x_1 &= e^{-\lambda\delta}\,(A \cos \omega\delta + B \sin \omega\delta) \\ x_2 &= e^{-2\lambda\delta}\,(A \cos 2\omega\delta + B \sin 2\omega\delta) \\ x_3 &= e^{-3\lambda\delta}\,(A \cos 3\omega\delta + B \sin 3\omega\delta)\,. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch einfache Umrechnungen:

$$a = -(A^2 + B^2)\, u^2 \sin^2 \omega\delta$$
$$b = -(A^2 + B^2)\, u^3 \sin \omega\delta \sin 2\omega\delta$$
$$c = -(A^2 + B^2)\, u^4 \sin^2 \omega\delta$$

und folglich:

$$\frac{b}{a} = 2u \cos \omega\delta, \quad \frac{c}{a} = u^2,$$

womit λ und ω gefunden sind. Allerdings gehören zu einem Werte von $\cos \omega\delta$ unendlich viele Werte von ω selbst; welcher von ihnen zu nehmen ist, kann nur durch Hinzunahme einer fünften Beobachtung entschieden werden, die von den ersten nicht um Vielfache von δ entfernt ist.

Register.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Bruns, Dr. **Heinrich,** Professor der Astronomie an der Universität Leipzig, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens. [VI u. 159 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 3.40, in Leinwand geb. n. ℳ 4.—

——— Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. [VIII u. 310 S. u. 18 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n ℳ 8.40.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 4 Bänden. I. Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [VIII u. 883 S.] gr. 8. 1894. geh. n. ℳ 22.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 24.—

——— II. Band. Vom Jahre 1200 bis zum Jahre 1668. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 190 Figuren im Text. [XII u. 943 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 26.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 28 —

——— III. Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. In 3 Abteilungen. Mit 146 Figuren im Text. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 25.—, in Halbfranz geb. n. ℳ 27.—

——— IV. Band. Von 1759 bis 1799. Bearbeitet von M. Cantor, S. Günther, V. Bobynin, A. v. Braunmühl, F. Cajori, E. Netto, G. Loria, V. Kommerell, G. Vivanti, und C. R. Wallner. 1. und 2. Lieferung. [S. 1—402.] gr. 8. 1907. geh. je n. ℳ 5.60. Lieferung 3 unter der Presse.

Cesàro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität zu Neapel, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. Gerhard Kowalewski, Professor der Mathematik an der Universität Bonn. Mit 48 Figuren im Text. [VIII u. 341 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Genocchi, Angelo, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Klein, Dr. **F.,** Professor an der Universität Göttingen, autographierte Vorlesungshefte. 4. geh.

I. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie.
Heft I, 391 Seiten (W.-S. 1895/96) } zusammen n. ℳ 14.50.
Heft 2, 354 Seiten (S.-S. 1896) }

II. Lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung (S.—S. 1894). Neuer unveränderter Abdruck. [IV u. 524 S.] 1906. geh. n. ℳ 8.50.

VII. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. [VIII u. 468 S.] (S.—S. 1901.) geh. n. ℳ 10.—

Müller, Dr. **Felix,** Professor in Friedenau, Vocabulaire Mathématique, français-allemand et allemand-français. Mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch. Enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. [XV u. 316 S.] Lex.-8. 1900/1901. In Leinwand geb. n. ℳ 20.—

Wurde in 2 Lieferungen ausgegeben:
I. Lieferung: [IX u. 132 S.] 1900. geh. n. ℳ 8.—
II. — [IX—XV u. 133—316.] 1901 geh. n. ℳ 11.—

Perry, Dr. **John,** F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Direktor des Städt. Elektrizitätswerkes zu Bremen. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 12.—

Seliwanoff, D., Privatdozent an der Universität und Professor an den höheren Frauenkursen zu St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 4.—

Zeuthen, Dr. **H. G.,** Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 16.—, in Leinw. geb. n. ℳ 17.—







